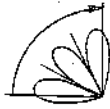


БИБЛИОТЕКА
ИНЖЕНЕРА —
ГИДРОАКУСТИКА

А. К. Розов

**ОБНАРУЖЕНИЕ
СИГНАЛОВ
В НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ
УСЛОВИЯХ**

Судостроение



БИБЛИОТЕКА
ИНЖЕНЕРА —
ГИДРОАКУСТИКА

А. К. РОЗОВ

**ОБНАРУЖЕНИЕ
СИГНАЛОВ
В НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ
УСЛОВИЯХ**



ЛЕНИНГРАД
„СУДОСТРОЕНИЕ“
1987

ББК 32.875
Р65
УДК 681.883.9

СЕРИЯ „БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА-ГИДРОАКУСТИКА”

Редакционная коллегия: В. И. Бабий, А. П. Евтютов,
А. Е. Колесников, Е. А. Корешин, А. П. Ляликов, В. Ф. Мартынюк,
В. В. Ольшевский, Л. В. Орлов, А. Л. Простаков, В. А. Сапрыкин,
Г. М. Свердли, А. Д. Старков,
Ю. Ф. Тарасюк (ответственный редактор), В. И. Тимошенко

Рецензент канд. техн. наук В. А. Зарайский

Розов А. К.

Р65 Обнаружение сигналов в нестационарных гидроакустических условиях. — Л.: Судостроение, 1987. — 132 с.: ил. (Библиотека инженера-гидроакустика).

ИСБН

Описаны методы повышения вероятности обнаружения сигнала, основанные на использовании модифицированного байесовского правила определения наилучшего момента остановки наблюдения. С помощью цифрового моделирования определена эффективность найденных процедур обнаружения сигнала.

Рассчитана на инженеров и научных сотрудников, занимающихся разработкой систем обнаружения сигнала.

Р. 3605030000-008 35-87
048(01)-87

ББК 32.875

© Издательство „Судостроение”, 1987 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

По проблеме обнаружения сигналов издано большое число книг, поэтому выход еще одной требует обоснования.

„Обычная постановка задачи обнаружения такова: наблюдается радиолокационный сигнал \tilde{x} , который при отсутствии объекта обнаружения представляет собой шум, а при наличии его — смесь отраженного (полезного) сигнала с шумом. Какая именно ситуация имеет место, неизвестно. Необходимо по наблюдаемой реализации x принять решение о наличии или отсутствии объекта обнаружения”. [21].

По этой же схеме, а точнее, путем последовательного ее применения к наблюдаемым воздействиям производят обнаружение сигнала и в условиях, когда появлению сигнала предшествует случайный, но в среднем достаточно продолжительный период его ожидания. Понятно, что такое решение задачи является слишком упрощенным, поскольку не учитываются результаты предшествующих наблюдений.

Учет накапливающейся в процессе наблюдения информации можно осуществить, если средства обнаружения могли бы вести наблюдения до конца временного интервала, на котором может появиться сигнал. Тогда задача обнаружения свелась бы к задаче оценивания момента появления сигнала, который может определяться, например, по максимуму значения апостериорной вероятности его местоположения. При таком способе обнаружения можно получить наибольшую вероятность в определении местоположения сигнала на временном интервале.

В реальной обстановке средства наблюдения должны выносить решения о поступлении сигнала сразу за моментом его поступления, а не дожидаться окончания всего временного интервала, на котором он может появиться. От такого сокращения времени наблюдения информация о местоположении сигнала оказывается меньшей, и поэтому правильное его местоположение удается определить с меньшей вероятностью.

Вопросу о том, как составить такой алгоритм, при котором преждевременные ложные тревоги были бы редки, а запаздывание в выдаче команды о появлении сигнала мало, и посвящена данная книга. Этим в основном она отличается от других книг по обнаружению сигналов.

Определение процедуры обнаружения (вида статистик и границ областей принятия решений) ведется на базе теории оптимальных остановок, наиболее полно представленной в работах А. Н. Ширяева [24, 26] и др.

Только с появлением этих работ оказалось возможным составление алгоритмов последовательного обнаружения сигналов.

Вторым вопросом, рассмотренным в книге, является обоснование возможности применения аппарата стохастических дифференциальных уравнений для представления динамики формирования статистик (апостериорных вероятностей). Показывается, как могут быть составлены уравнения статистик для разных условий обнаружения сигнала.

Вычисление значений статистик для текущего момента времени производится в результате решения их дифференциальных уравнений. В этой связи понятно то большое внимание, которое уделяется способам решения уравнений. От метода решения уравнений зависит вид алгоритма, определяющего построение систем обнаружения сигнала. Приведенные примеры иллюстрируют эффективность предложенных алгоритмов, а также позволяют проследить, как увеличивается вероятность обнаружения от допустимого времени запаздывания в принятии решения о поступлении сигнала, а также от организации повторного поиска.

Книга имеет практическое значение, так как позволяет:

- ознакомить разработчиков гидроакустической аппаратуры с возможностями, которые открывает использование теории оптимальных остановок и аппарата стохастических дифференциальных уравнений для составления алгоритмов построения систем обнаружения сигналов;

- составить процедуры обнаружения, обеспечивающие достижение наибольших вероятностей обнаружения, для условий, когда появлению сигнала предшествует продолжительное время ожидания;

- определить требования к ЦВМ в отношении их быстродействия и оперативной памяти, необходимые для реализации составленных алгоритмов обнаружения.

Книга состоит из пяти глав.

В гл. 1 рассматриваются особенности последовательного обнаружения сигнала и условия, которым должны удовлетворять сигналы и помехи, чтобы составление алгоритмов обнаружения оказалось возможным. Обращается внимание на различие в дифференциальном представлении сигнала воздействий в случае помех вида белого шума и помех, представляемых окрашенным шумом.

В гл. 2 формулируется правило принятия решения о поступлении сигнала для случая, когда время дискретно. С помощью модифицированного байесовского правила (МБП) для такой модели определяются статистика и граница областей принятия решений. Для статистики составляются рекуррентные соотношения. Моделированием на ЦВМ проверяется оптимальность границы.

В гл. 3 МБП распространяется на случай непрерывного времени. Продолжительность времени воздействия сигнала предполагается намного меньшей времени наблюдения. Определяются статистики и границы областей принятия решений для случая, когда ожидаемый сигнал имеет постоянную продолжительность и когда его продолжительность случайна.

В гл. 4 составляются дифференциальные уравнения статистик. Уравнения статистик предполагают использование оценок мгновенных значений

сигнала, которые для гауссовских сигналов с дробно-рациональным спектром получаются фильтрацией по Калману — Бьюси.

В гл. 5 с помощью моделирования процедуры обнаружения на ЦВМ определяется эффективность обнаружения сигнала для случая непрерывного времени. Показывается, что определенная с помощью МБП граница областей принятия решений остается оптимальной и в случае непрерывного времени.

Книга дополнена приложениями, в которые вынесены примеры составления выражений для отношения правдоподобия, относящиеся к случаю, когда наблюдаемые воздействия воспринимаются несколькими приемными элементами, а также вывод уравнений фильтрации сигнала и статистик для случая телеграфного сигнала.

Автор благодарит А. Н. Ширяева, способствовавшего формированию основных теоретических положений, изложенных в данной работе.

Все замечания и предложения просим направлять по адресу: 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8, издательство „Судостроение“.

Только с появлением этих работ оказалось возможным составление алгоритмов последовательного обнаружения сигналов.

Вторым вопросом, рассмотренным в книге, является обоснование возможности применения аппарата стохастических дифференциальных уравнений для представления динамики формирования статистик (апостериорных вероятностей). Показывается, как могут быть составлены уравнения статистик для разных условий обнаружения сигнала.

Вычисление значений статистик для текущего момента времени производится в результате решения их дифференциальных уравнений. В этой связи понятно то большое внимание, которое уделяется способам решения уравнений. От метода решения уравнений зависит вид алгоритма, определяющего построение систем обнаружения сигнала. Приведенные примеры иллюстрируют эффективность предложенных алгоритмов, а также позволяют проследить, как увеличивается вероятность обнаружения от допустимого времени запаздывания в принятии решения о поступлении сигнала, а также от организации повторного поиска.

Книга имеет практическое значение, так как позволяет:

- ознакомить разработчиков гидроакустической аппаратуры с возможностями, которые открывает использование теории оптимальных остановок и аппарата стохастических дифференциальных уравнений для составления алгоритмов построения систем обнаружения сигналов;

- составить процедуры обнаружения, обеспечивающие достижение наибольших вероятностей обнаружения, для условий, когда появлению сигнала предшествует продолжительное время ожидания;

- определить требования к ЦВМ в отношении их быстродействия и оперативной памяти, необходимые для реализации составленных алгоритмов обнаружения.

Книга состоит из пяти глав.

В гл. 1 рассматриваются особенности последовательного обнаружения сигнала и условия, которым должны удовлетворять сигналы и помехи, чтобы составление алгоритмов обнаружения оказалось возможным. Обращается внимание на различие в дифференциальном представлении сигнала воздействий в случае помех вида белого шума и помех, представляемых окрашенным шумом.

В гл. 2 формулируется правило принятия решения о поступлении сигнала для случая, когда время дискретно. С помощью модифицированного байесовского правила (МБП) для такой модели определяются статистика и граница областей принятия решений. Для статистики составляются рекуррентные соотношения. Моделированием на ЦВМ проверяется оптимальность границы.

В гл. 3 МБП распространяется на случай непрерывного времени. Продолжительность времени воздействия сигнала предполагается намного меньшей времени наблюдения. Определяются статистики и границы областей принятия решений для случая, когда ожидаемый сигнал имеет постоянную продолжительность и когда его продолжительность случайна.

В гл. 4 составляются дифференциальные уравнения статистик. Уравнения статистик предполагают использование оценок мгновенных значений

сигнала, которые для гауссовских сигналов с дробно-рациональным спектром получаются фильтрацией по Калману — Бьюси.

В гл. 5 с помощью моделирования процедуры обнаружения на ЦВМ определяется эффективность обнаружения сигнала для случая непрерывного времени. Показывается, что определенная с помощью МБП граница областей принятия решений остается оптимальной и в случае непрерывного времени.

Книга дополнена приложениями, в которые вынесены примеры составления выражений для отношения правдоподобия, относящиеся к случаю, когда наблюдаемые воздействия воспринимаются несколькими приемными элементами, а также вывод уравнений фильтрации сигнала и статистик для случая телеграфного сигнала.

Автор благодарит А. Н. Ширяева, способствовавшего формированию основных теоретических положений, изложенных в данной работе.

Все замечания и предложения просим направлять по адресу: 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8, издательство „Судостроение“.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время задача обнаружения сигнала все чаще трактуется не как обнаружение собственно сигнала, а как обнаружение источника сигнала или лоцируемого объекта (объектов обнаружения). А это далеко не одно и то же, поскольку обнаружение объектов должно учитывать временную неопределенность появления сигнала, целевую функцию, т. е. то, как будет использовано обнаружение сигнала. Иными словами, для учета всех факторов, связанных с обнаружением объекта, традиционная схема (предполагается, что в результате наблюдения должно приниматься одно из решений: в наблюдаемом воздействии присутствуют одна помеха или помеха и сигнал) не годится, так как она не учитывает особенности обстановки, в которой ведется обнаружение объекта.

Сказанное в полной мере относится к обнаружению объектов гидроакустического происхождения, где отличие характера обнаружения сигнала от характера обнаружения объекта, прежде всего, выражено в следующем:

- наступлению сигнала, как правило, предшествует продолжительный (заранее не определенный) период его ожидания;
- сам сигнал может быть настолько слабым, что реально может идти речь об обнаружении только пачки сигналов;
- обнаружению объекта должно сопутствовать безотлагательное выполнение тех или иных действий.

Все это приводит к необходимости придания наблюдению и алгоритму обнаружения последовательного характера.

В таких условиях оказывается большинство складывающихся в гидроакустике ситуаций. Например, когда в зоне действия гидроакустического средства спонтанно возникают вызванные самыми различными причинами возмущения или, когда обнаружению подлежит начало работы какой-нибудь гидролокционной станции до определенного времени не работавшей, а затем в заранее не определенный момент времени вдруг начавшей работу. В этих случаях надо не пропустить, более того, как можно скорее обнаружить возникшее возмущение.

Аналогичная ситуация возникает и тогда, когда дальность действия гидроакустического средства оказывается меньше протяженности пространства, в пределах которого может находиться источник сигнала. В результате перемещения гидроакустического средства или источника сигнала последний в неопределенный момент времени может войти в зону действия

гидроакустического средства. В этом случае обнаружение понимается как установление факта появления источника сигнала. Подобная обстановка складывается, например, в случае обнаружения сигналов и шумов от судов, идущих встречными курсами.

Обнаружение сигнала после его появления позволяет своевременно предпринять те или иные действия, например, подать команду на изменение курса движения судна при обнаружении другого судна, идущего встречным курсом. Но для этого надо, чтобы за время, предшествующее появлению сигнала, ложные решения об обнаружении сигналов были редки, а принятие решения о поступлении сигнала происходило без существенных запаздываний.

Когда сигнал сильный, что имеет место при сравнительно небольшой дальности до источника сигнала или когда помехи пренебрежимо малы, ошибки обнаружения в виде ложных тревог за время ожидания сигнала и запаздывания в его обнаружении настолько малы, что их можно не учитывать, а обнаружение сигнала вести самыми простыми средствами.

Когда сигнал слаб, что, как правило, бывает при достаточно удаленном источнике сигнала, или когда интенсивность помех велика, единственным средством обнаружения сигнала является усреднение, понимаемое в том или ином смысле, входного воздействия. Необходимость в усреднении влечет за собой запаздывание в обнаружении сигнала. Тем самым запаздывание в принятии решения о поступлении сигнала есть своего рода плата, на которую приходится идти за возможность обнаружения слабого сигнала.

Сигнал может оказаться настолько слабым, что для его обнаружения необходима повторяемость, т. е. пачка сигналов. В этом случае неизбежно запаздывание, понимаемое как задержка в принятии решения о появлении сигналов по отношению к моменту воздействия первого из них.

Возможность обнаружения слабых сигналов, хотя и с известным запаздыванием, — это одновременно и возможность лоцирования удаленных источников. В этой связи возникает необходимость в составлении алгоритмов последовательного обнаружения, при которых были бы редки как ложные решения о появлении сигнала (на этапе его ожидания), так и малы запаздывания в принятии решения о его поступлении.

С помощью алгоритма обнаружения, учитывающего особенности задачи и допускающего то или иное запаздывание в принятии решения о появлении сигнала, можно увеличить вероятность его обнаружения по сравнению с использованием процедуры своевременного обнаружения. Если допускаются большие запаздывания в обнаружении, а после прекращения наблюдений уточняется момент появления сигнала, то возможно получение большей вероятности правильного определения момента появления сигнала по сравнению с обнаружением, допускающим малое запаздывание или осуществляемое без запаздываний.

Вероятность правильного определения момента появления сигнала может быть увеличена, если после первичного поиска организовать повторный. Такому увеличению способствуют более благоприятные условия, появляющиеся при новом (апостериорном) распределении момента появления сигнала, вычисляемом по окончании первичного поиска.

Синтез алгоритмов обнаружения сигналов осуществляется двумя этапами: 1) анализ возможности применения разработанной теории об оптимальной остановке к составлению алгоритмов обнаружения сигналов; 2) разработка способов моделирования составленных алгоритмов на ЦВМ.

Остановимся кратко на характеристике этих этапов и вопросах, составляющих анализ эффективности составленных алгоритмов.

Первый этап. Требование о своевременном прекращении наблюдений характерно для задач об оптимальной остановке, постановка и решение этих задач восходит еще к работам А. Вальда [4, 5], которыми в конце 40-х гг. было положено начало развитию последовательного статистического анализа. Вначале последовательный анализ относился к задаче о различении параметра наблюдаемого процесса, при этом предполагалось, что неизвестный параметр не меняется во времени [2, 29, 31, 32]. Затем в работах ряда авторов подход А. Вальда был распространен на случаи, когда параметр сам является случайным процессом. В этом направлении особое место занимают исследования А. Н. Ширяева об определении момента наступления разладки, т. е. момента изменения вероятностных характеристик процесса. В предположении, что наблюдаемый процесс является марковским, А. Н. Ширяеву удалось получить ряд законченных результатов в компактной форме [22] — [26], что способствовало их распространению как среди математиков, так и среди специалистов в области технической кибернетики.

В упомянутых работах были развиты методы обработки наблюдений во временной области, которые привели к более глубоким и конструктивным результатам по сравнению с результатами, полученными с помощью методов обработки в частотной области (задания процессов на базе корреляционных функций и фильтрации по Винеру — Хопфу). В этой связи появились определенные возможности для рассмотрения случая, когда разладка длится ограниченное время, т. е. когда изменение вероятностных характеристик сопровождается „возвращением” их в исходное состояние.

В данной книге в качестве разладки выступает сигнал, по продолжительности существенно меньший времени наблюдения, при этом начало воздействия сигнала не определено. В качестве математического аппарата, используемого для составления процедуры обнаружения, выбраны методы решения задач об оптимальной остановке.

Определение процедуры обнаружения, т. е. нахождение достаточной статистики и границ областей принятия решений, оказывается возможным, когда процесс, описывающий появление сигнала, является марковским. Рассматриваемый в книге процесс появления сигнала не может считаться марковским, что затрудняет нахождение процедуры, соответствующей байесовскому подходу. Приходится идти на приближения: вместо байесовского правила использовать так называемое модифицированное байесовское правило [24, 28].

Вопрос об обнаружении сигнала решается в процессе проводимых последовательно во времени наблюдений за входным воздействием. Поэтому, если не принять специальных мер, то с увеличением времени наблюдения будет возрастать объем „памяти”, необходимой для запоминания всех наблюдаемых к моменту t данных (n_t). В связи с этим возникает вопрос

о нахождении достаточных статистик, которые бы можно вычислять рекуррентным образом, т. е. путем пересчета предшествующих значений наблюдений с учетом вновь появляющихся данных.

Для непрерывных входных воздействий с дробно-рациональным спектром эволюцию достаточных статистик можно представить с помощью уравнений особого класса, так называемых стохастических дифференциальных уравнений Ито. Показывается, как могут быть составлены дифференциальные уравнения для статистик в случаях, когда сигнал имеет постоянную или случайную продолжительность и представляет собой импульс постоянной амплитуды или „заполненный” низкочастотным (высокочастотным) шумом, а помеха имеет вид белого или окрашенного шума.

Второй этап. Этот этап включает рассмотрение способов решения составленных дифференциальных уравнений. Только в результате решения уравнений можно последовательно во времени получать значения статистик. Как правило, эти уравнения нелинейны, поэтому требуются численные методы решения.

Рекуррентные соотношения, получаемые в результате использования того или иного численного метода решения уравнений, совместно с границами областей принятия решений определяют цифровой алгоритм системы обнаружения. Сама же система обнаружения сигнала может быть выполнена в виде специализированной ЦВМ.

Стохастический характер уравнений придает ряд особенностей использованию численных методов их решения. Здесь не все еще сделано, тем не менее определенные рекомендации разработчикам систем обнаружения можно сделать и сейчас.

Прежде всего следует обратить внимание на характер отбора наблюдаемых данных, на зависимость способа отбора от степени окрашенности помех. Когда помеха может быть представлена окрашенным шумом, возможно прямое считывание наблюдаемых воздействий в дискретные моменты времени. Когда же помеха представляется белым шумом, отбору в дискретные моменты времени должно предшествовать аналоговое интегрирование входных воздействий.

Вид цифрового алгоритма зависит от выбора численного метода решения уравнений для статистик. Здесь просматривается определенная зависимость величины шага временной дискретизации от выбранного численного метода решения: с более крупным шагом удается решать уравнения при использовании относительно более громоздких численных методов решения. Выбор метода решения и зависящего от него цифрового алгоритма системы обнаружения должен обеспечить наибольшее быстродействие решения при допустимых ошибках.

Выбор цифрового алгоритма системы обнаружения должен предусматривать проверку составленного алгоритма на устойчивость. Такая проверка производится путем моделирования процедуры обнаружения на ЦВМ по большому числу реализаций входных воздействий. Существуют причины, приводящие к нарушению устойчивости: ошибки в задании начальных условий, большая величина шага и др. Моделирование процедуры обнаружения позволяет наиболее надежно убедиться в устойчивости алгоритма и им обязательно должен завершаться этап синтеза цифрового алгоритма.

Моделирование процедуры обнаружения необходимо также для определения того, насколько МБП пригодно для нахождения границ областей принятия решений и вида достаточных статистик. Это может быть установлено путем сопоставления эффективности составленных по МБП алгоритмов с алгоритмами, в которые внесены искажения, например граница по сравнению с расчетной взята более высокой (или более низкой).

Анализ эффективности составленных алгоритмов обнаружения тоже удастся произвести с помощью моделирования (пока это единственная возможность). Моделированием на ЦВМ были вычислены значения вероятностей ложных и правильных обнаружений и время, затрачиваемое на обнаружение.

С помощью моделирования процедуры обнаружения можно установить зависимость значений вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения, а также времени, затрачиваемого на обнаружение, от характеристик сигналов и помех, а именно:

- соотношения между продолжительностью сигнала и временного интервала, на котором он появляется;
- вида процесса (низкочастотный или высокочастотный), описывающего сигнал;
- степени окрашенности помех;
- энергетического соотношения между сигналом и помехами.

Цифровое моделирование процедуры обнаружения по найденным алгоритмам показало, что последние приводят к результатам, которые могут представлять практический интерес.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР ОБНАРУЖЕНИЯ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛА И ПОМЕХ

Последовательный характер обнаружения, как отмечалось, связан со стремлением определять алгоритм обнаружения сигнала с учетом особенностей обстановки и того, ради чего осуществляется обнаружение.

В гидроакустике часто возникают ситуации, когда для принятия того или иного решения о складывающейся обстановке очень важно не тратить лишнего времени на наблюдение. В частности, для условий, когда приему сигналов предшествует большое, но заранее не известное время ожидания, это требование предопределяет последовательный характер обнаружения, при котором решение о появлении сигнала принимается в результате последовательно выполняемых наблюдений. Только в результате последовательного наблюдения и применения соответствующих алгоритмов можно рассчитывать на принятие незамедлительных действий, вытекающих из самого характера обстановки. Оптимизация обнаружения имеет смысл исключительно для слабых сигналов, но поскольку сигналы становятся слабыми вследствие значительного удаления их источников (или объектов лоцирования), то возможность обнаружения слабых сигналов включает одновременно и возможность обнаружения удаленных источников, т. е. возможность увеличения дальности действия гидроакустических средств.

Последовательный характер обнаружения может быть реализован с помощью методов, принятых в теории оптимальных остановок, и аппарата стохастических дифференциальных уравнений.

1.1. Особенности последовательного обнаружения сигналов

В настоящее время задачи обнаружения сигналов рассматриваются применительно к случаям, когда известно начало возможного появления сигнала θ или интервал, на котором он может появиться $[0, T]$. Решение о наличии сигнала принимается либо в момент окончания возможного появления сигнала $\theta + h$, либо в конце интервала наблюдения T .

В первом случае, когда предполагается, что сигнал может начинаться лишь в момент начала наблюдения и заканчиваться с окончанием наблюдений, задачу обнаружения можно трактовать как задачу оценивания параметра λ , который может принимать одно из двух значений — нуль или единица. В частности, нулем и единицей может быть амплитуда сигнала.

В байесовской постановке задачи параметр λ представляет собой случайную величину с априорным распределением $P(\lambda=1)$ и $P(\lambda=0)$. При оценивании параметра λ алгоритм оценивания составляется таким образом, чтобы для каждой реализации η_0^t выбиралось то значение параметра λ^* , которому соответствует наименьшее значение риска

$$R(\lambda^*, \eta_0^t) = \inf_{\lambda} \sum_{j=1}^2 \bar{W}(\lambda_j, \lambda_j) P(\lambda_j | \eta_0^t). \quad (1.1)$$

Здесь $\bar{W}(\lambda_j, \lambda_j)$ — функция потерь, характеризующая степень ущерба от ошибочных решений; $P(\lambda_j | \eta_0^t)$ — апостериорная вероятность значений оцениваемого параметра.

Для упрощения записи случайную величину θ (момент поступления сигнала) и ее реализацию $\hat{\theta}$ иногда будем обозначать одной буквой θ . Так, в случае дискретного времени вместо $P(\theta = \hat{\theta})$ будем писать $P(\theta)$. Аналогично в случае непрерывного времени вместо плотности $f(\hat{\theta})$ будем писать $f(\theta)$.

Вернемся к рассмотрению задачи обнаружения сигнала, рассматриваемой как задача оценивания параметра. В такой трактовке возможны два решения $D(D_0, D_1)$, где D_0 — решение об отсутствии сигнала, а D_1 — решение о наличии сигнала.

В случае, когда сигнал может появиться только в момент θ и продолжаться до момента $\theta + h$, решение D_i , $i = 0, 1$, согласно выражению (1.1), принимается в соответствии с правилом

$$D_i = \begin{cases} D_1, & \frac{P(1 | \eta_{\theta}^{\theta+h})}{P(0 | \eta_{\theta}^{\theta+h})} \geq \Gamma; \\ D_0, & \frac{P(1 | \eta_{\theta}^{\theta+h})}{P(0 | \eta_{\theta}^{\theta+h})} < \Gamma, \end{cases}$$

где

$$\Gamma = \frac{\bar{W}(0,0) - \bar{W}(1,0)}{\bar{W}(1,1) - \bar{W}(0,1)}.$$

Поскольку

$$\frac{P(1 | \eta_{\theta}^{\theta+h})}{P(0 | \eta_{\theta}^{\theta+h})} = \varphi_{\theta}^{\theta+h} \frac{P(1)}{P(0)},$$

где

$$\varphi_{\theta}^{\theta+h} = \frac{dP_1(\eta_{\theta}^{\theta+h} | \theta_t)}{dP_0(\eta_{\theta}^{\theta+h} | \theta_t = 0)},$$

то

$$D_i = \begin{cases} D_{1, \varphi_\theta^{\theta+h}} \geq \frac{P(0)}{P(1)} \Gamma; \\ D_{0, \varphi_\theta^{\theta+h}} < \frac{P(0)}{P(1)} \Gamma. \end{cases} \quad (1.2)$$

Во втором случае, когда начало воздействия сигнала на интервале наблюдения не определено, а решение о наличии сигнала выносится в конце интервала наблюдения,

$$P(1|\eta_0^T) = \int_0^T P(1, \theta | \eta_0^T) d\theta = \int_0^T P(1|\eta_0^T, \theta) f(\theta) d\theta.$$

Поскольку

$$\frac{P(1|\eta_0^T)}{P(0|\eta_0^T)} = \frac{P(1)}{P(0)} \int_0^T \varphi_\theta^{\theta+h} f(\theta) d\theta,$$

где

$$\varphi_\theta^{\theta+h} = \frac{dP_1(\eta_0^T | \theta_t)}{dP_0(\eta_0^T | \theta_t = 0)},$$

то в выражении (1.2) вместо $\varphi_\theta^{\theta+h}$ должен подставляться результат усреднения

$$M\varphi_0^T = \int_0^T \varphi_\theta^{\theta+h} f(\theta) d\theta.$$

Вычисление $M\varphi_0^T$ может производиться с использованием реакции так называемого согласованного фильтра на наблюдаемое воздействие.

Вообще же оптимальная система вычисления $M\varphi_0^T$ многоканальна; каждый канал вычисляет „свое“ значение $\varphi_\theta^{\theta+h}$ при фиксированном значении параметра θ . Число каналов в такой системе зависит от длительности воздействия сигнала h , а также от протяженности интервала, на котором может появляться сигнал (интервал наблюдения). При реализации такой системы могут возникнуть трудности чисто технического характера, связанные с необходимостью введения большого числа каналов. Кроме того,

указанное условие, что решение о наличии сигнала должно выноситься в конце интервала наблюдения, часто не может быть принято. Дело в том, что для решения прикладных задач бывает необходимо предпринимать определенные действия сразу после окончания воздействия сигнала (и даже в процессе его воздействия) и поэтому дожидаться момента, когда будет просмотрен весь интервал, на котором может появиться сигнал, недопустимо.

Приспособить изложенный способ обнаружения сигнала к новым условиям невозможно, поскольку неясно, каким образом принимать интервал наблюдения, чтобы минимизировать одновременно ошибку в обнаружении сигнала и время запаздывания принятия решения о поступлении сигнала.

Разработчик интуитивно может найти решение задачи, приемлемое для практики, однако при таком эмпирическом подходе всегда будет оставаться невыясненным вопрос о том, насколько близко такое решение к потенциально возможному.

Для рассматриваемых ситуаций необходимо изменить характер обработки наблюдаемых воздействий, перейти от использования данных, полученных на всем интервале наблюдений, к данным, получаемым в процессе последовательных наблюдений.

Последовательный характер наблюдений должен позволить максимизировать вероятность правильного обнаружения сигнала (принимать решение о его наличии, когда он действительно имеет место) и минимизировать время запаздывания принятия решения о его появлении.

Сложность здесь заключается в том, что процедура обнаружения должна учитывать как всю предысторию наблюдений до текущего момента времени, так и прогноз возможных решений в будущем.

По вопросам обнаружения сигнала, местоположение которого на временной оси случайно, имеются фундаментальные работы [8, 17, 26], в которых излагаются полученные результаты в теории оптимальной остановки, являющиеся основой для разработки прикладных методов, применительно к сформулированной задаче.

Непосредственное применение этих работ для составления алгоритмов обнаружения затруднено вследствие использования в них малоизвестного инженерам аппарата теории меры, а также из-за того, что на практике не всегда оказываются выполненными предположения, принятые в этих работах, относительно математической модели рассматриваемых явлений. Необходимы инженерная интерпретация результатов этих работ и принятие определенных допущений.

Рассматриваемую задачу удобно сформулировать с помощью частично наблюдаемого процесса (X_t, η_t) , в котором компонента X_t представляет собой недоступный непосредственному наблюдению сигнал, а η_t — наблюдаемый процесс, вероятностные характеристики которого зависят от X_t . Наблюдение за η_t позволит вынести суждение о X_t .

В результате последовательного наблюдения за η_s^s , $0 \leq s \leq t$, требуется решить вопрос о том, в какой момент ν следует объявлять „тревогу“ с появлением сигнала и связанном с этим изменением вероятностных характеристик наблюдаемого процесса. Момент ν (момент прекращения наблюдений) желательно выбрать таким, чтобы до появления сигнала (до мо-

момента θ) по возможности не было ложных „тревог“, а после наступления сигнала момент подачи „тревоги“ (момент ν) был близок к моменту θ . Иначе говоря, требуется на основании последовательных наблюдений за $\eta_s, 0 \leq s \leq \nu$ выбрать момент остановки наблюдений ν так, чтобы максимизировать (минимизировать) некоторый функционал, характеризующий выигрыш (потери) от выбора момента ν .

Тем самым возникает задача об оптимальной остановке наблюдений. Особенности задачи учитываются функцией выигрыша (потерь)

$$W(\nu, \theta) = \begin{cases} g(\nu), & \nu < \theta; \\ f(\nu - \theta), & \nu \geq \theta, \end{cases}$$

характеризующей степень выигрыша от правильных решений.

Каждое правило δ характеризуется средним (байесовским) выигрышем

$$U^\delta(\pi_0) = M^\delta W(\nu, \theta),$$

где M^δ — усреднение по мере P^δ , индицируемой правилом δ ; π_0 — априорная вероятность наличия сигнала в начале наблюдений.

Правило $\delta \in K$ будет оптимальным байесовским правилом, если

$$U^{\delta^*}(\pi_0) = \sup_{\delta \in K} M^\delta W(\nu, \theta).$$

Для максимизации выигрыша от обнаружения целесообразно использовать байесовское правило, согласно которому наблюдения должны продолжаться до тех пор (момент ν), пока вычисленный для данной реализации η_0^t выигрыш $g(\eta_0^t)$ не сравняется с наибольшим выигрышем $U_t^f(\eta_0^t)$, который может быть получен от остановки на оставшемся интервале наблюдений $[t, T]$:

$$\nu^* = \min [t : g(\eta_0^t) = U_t^f(\eta_0^t)]. \quad (1.3)$$

Этому правилу соответствует процедура сравнения достаточной статистики с границей областей принятия решений. В качестве достаточной статистики, как это следует из выражения (1.3), может выступать все прошлое (все предыдущие наблюдения). Но с увеличением времени наблюдения будет возрастать объем памяти, необходимой для запоминания всех накопившихся к моменту t данных. В связи с этим возникает задача о нахождении достаточных статистик, которые требовали бы меньшей памяти о прошлых данных и вместе с тем не теряли информации о них.

Трудность решения этой задачи связана с неизвестностью функционала $U_t^f(\eta_0^t)$. Решить эту задачу удастся тогда, когда ненаблюдаемый параметр $U_t^f(\eta_0^t)$ описывается марковским процессом. В этом случае и вообще в так называемых аддитивных марковских задачах в качестве достаточной статистики может использоваться апостериорная вероятность, включающая в себя всю необходимую информацию о проведенных наблюдениях.

Это упрощает задачу, поскольку оказывается возможным оперировать не со всеми принятыми данными, а только с апостериорной вероятностью или с некоторыми ее характеристиками.

Более того, в этом случае изучение частично наблюдаемого процесса (x_t, η_t) сводится к изучению процесса, представляемого апостериорной вероятностью. Таким образом, исходная задача о принятии решения относительно x_t по неполным данным сводится к задаче о принятии решений по полным данным, если за состояние в момент t принимать значение апостериорной вероятности. При этом в информационном смысле ничего не теряется, поскольку в первоначальной задаче по неполным данным правило δ ищется в классе функций, зависящих от всего прошлого, а в рассматриваемой редуцированной задаче правило δ ищется на функциях от $\pi_s, 0 \leq s \leq t$, что в конечном счете также является функцией от $\eta_s, 0 \leq s \leq t$ и π_0 .

Вычисление статистик в виде апостериорных вероятностей для момента t возможно, если оно имеет рекуррентный характер. Для этого наблюдаемые воздействия должны удовлетворять ряду требований, в частности, обладать марковскими свойствами, и представляться гауссовскими процессами. При этом эволюция апостериорных вероятностей может быть описана с помощью уравнений особого класса, так называемых стохастических дифференциальных уравнений Ито.

В общем виде описание текущих значений статистик может быть представлено с помощью уравнения вида

$$dx_t = a(x_t, t) + b(x_t, t)d\eta_t, \quad (1.4)$$

где $a(x_t, t)$ и $b(x_t, t)$ — неслучайные функции своих аргументов; $d\eta_t$ — дифференциал некоторого случайного процесса.

Помимо статистик уравнениями такого вида могут быть представлены процедуры линейной фильтрации по Калману — Бьюси, процедуры нелинейной фильтрации в задачах оценивания параметров процессов, а также многие другие процедуры, представляющие интерес для практики.

В отличие от обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx_t}{dt} = a(x_t, t), \quad (1.5)$$

которому соответствует допредельное уравнение в конечных разностях

$$x_{t_{k+1}} = x_{t_k} + a(x_{t_k}, t_k)\Delta + 0(\Delta),$$

уравнению (1.4) отвечает допредельное уравнение

$$x_{t_{k+1}} = x_{t_k} + a(x_{t_k}, t_k)\Delta + b(x_{t_k}, t_k)\Delta\eta_{t_k}. \quad (1.6)$$

где $\Delta\eta_{t_k}$ имеет порядок $\sqrt{\Delta}$.

Только при таком предположении о порядке $\Delta\eta_{t_k}$ можно учесть случайный характер наблюдаемого воздействия; при более высоком порядке

малости $\Delta \eta_{t_k}$ соотношение (1.6) в пределе ($\Delta \rightarrow 0$) приводится к уравнению (1.5), т. е. η_t теряет случайный характер и, наоборот, при более низком порядке малости у $\Delta \eta_t$ дисперсия предельного процесса η_t оказывается бесконечной. Более того, если предположить, что η_t является процессом с независимыми приращениями, например винеровским, то

$$x_{k+1} = x_{t_k} + a(x_{t_k}, t_k) \Delta + b(x_{t_k}, t_k) (\eta_{k+1} - \eta_k)$$

и x_{t_k} будет марковским процессом.

В качестве η_t может приниматься и гауссовский процесс с дробно-рациональным спектром, при помощи которого можно достаточно хорошо аппроксимировать реальные воздействия. В этом случае наблюдаемый процесс η_t может рассматриваться как m -мерный марковский процесс, а x_t — как n -мерная компонента $n + m$ -мерного марковского процесса.

Сделанные относительно порядка $\Delta \eta_t$ замечания поясняют причины необходимости введения в рассмотрение стохастических дифференциальных уравнений Ито, который предложил второй интеграл в интегральном представлении уравнения (1.4)

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_s, s) ds + \int_0^t b(x_s, s) d\eta_s \quad (1.7)$$

понимать как предел в среднеквадратическом суммы

$$\int_0^t b(x_s, s) d\eta_s = \lim_{\max(t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} b(x_{t_k}, t_k) (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}),$$

где обозначение *l. i. m.* составлено из начальных букв *limit in the mean square*. Заметим, что первый интеграл в уравнении (1.7) понимается как обычный интеграл Римана.

В дальнейшем в качестве x_t будут выступать α_t , β_t , π_t . Тем самым задача сведется к нахождению коэффициентов $a(x_t, t)$ и $b(x_t, t)$, а также к рассмотрению способов решения уравнения (1.4).

1.2. Математическая модель наблюдаемых воздействий

Обычно флюктуирующий сигнал представляют в виде суммы элементарных сигналов, отраженных от большого числа перемещающихся относительно друг друга отражателей, при этом предполагается, что выполняются условия центральной предельной теоремы. В результате можно считать, что во многих случаях эхо-сигнал может представляться гауссовским процессом.

К классу гауссовских процессов также могут быть отнесены сигналы, возникающие от различных источников шума. Это, прежде всего, шумы движущихся объектов, так называемые внешние шумы, а также флюктуирующие сигналы, приходящие от работающих гидролокационных станций. Шумовой характер последних обусловлен главным образом многолучевостью распространения звука.

Шумоподобный характер сигнала и помех, как правило, может быть представлен гауссовскими процессами. Это относится к помехам в виде шумов моря, к помехам, обусловленным реверберацией, а также ко всем так называемым внутренним помехам, появляющимся вследствие движения приемного устройства (шум обтекания, шумы корабельных установок) и возникновения тепловых шумов усилительной аппаратуры.

Параметры гауссовских процессов, используемых для представления сигналов и помех (интенсивность, конфигурация спектра, зависимость интенсивности помех от времени и т. д.), могут быть установлены из работ [3, 11, 19]. Для определения спектральных характеристик сигнала и помех могут быть использованы работы [14, 27 и др.] Материалы по расчету гидроакустических полей позволят энергетически характеризовать сигнал и помехи и рассчитать, какие дальности обнаружения способен обеспечить тот или иной алгоритм построения систем.

Говоря о возможности составления уравнений оценивания, естественно предположить, что наблюдаемые воздействия (сигналы и помехи) допускают дифференциальное представление. Такая возможность появляется, если предположить, что гауссовский процесс, используемый для описания сигнала и помех, обладает марковскими свойствами, т. е. его спектральная плотность может быть записана в виде

$$G(\omega) = \frac{C}{2\pi} \left| \frac{1}{b_0 + b_1(i\omega) + \dots + b_k(i\omega)^k} \right|^2,$$

где C — интенсивность шума в полосе один герц на интервале частот $(-\infty, \infty)$.

В том случае, когда корни многочлена $b_0 + b_1(i\omega) + \dots + b_k(i\omega)^k$ имеют отрицательные вещественные части, процесс θ_t может быть представлен системой уравнений

$$\begin{aligned} dv_t^{(0)} &= v_t^{(1)} dt; \\ \frac{dv_t^{(k-2)}}{dt} &= v_t^{(k-1)} dt; \\ dv_t^{(k-1)} &= -b_{k-1}v_t^{(k-1)} dt - \dots - b_0v_t^{(0)} dt + d\omega_t; \end{aligned}$$

$$\theta_t = \sqrt{C} v_t^{(0)}$$

и рассматриваться как компонента K -мерного марковского процесса.

Задание сигнала с помощью систем стохастических дифференциальных уравнений позволит в дальнейшем составить уравнения фильтрации и в конечном счете — дифференциальные уравнения для статистик.

Покажем, какой вид имеют дифференциальные уравнения низкочастотного и высокочастотного сигналов.

Низкочастотный сигнал со спектром

$$G(\omega) = \frac{C_1}{2\pi(\alpha^2 + \omega^2)}, \quad (k=1)$$

может быть представлен уравнением

$$d\theta_t = -a\theta_t dt + \sqrt{C_1} dw_t^{(s)}.$$

Для того чтобы спектральная плотность процесса θ_t в нуле совпадала со спектральной плотностью белого шума, необходимо в уравнении (1.8) перед dw_t иметь коэффициент $a\sqrt{C_1}$, т. е. чтобы уравнение имело вид

$$d\theta_t = -a\theta_t dt + a\sqrt{C_1} dw_t^{(s)}. \quad (1.8)$$

В этом случае эффективное значение θ_t будет равно $\sqrt{aC_1/2}$, а ширина энергетического спектра на уровне 0,5 — $a/2\pi$.

Низкочастотный сигнал со спектром

$$G(\omega) = \frac{C_1}{2\pi [b_0^2 + (b_1^2 - 2b_0)\omega^2 + \omega^4]}, \quad b_0 - \frac{b_1^2}{4} \leq 0$$

может быть представлен системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} d\theta_t &= v_t^{(1)} dt; \\ dv_t^{(1)} &= -b_1 v_t^{(1)} dt - b_0 \theta_t dt + \sqrt{C_1} dw_t^{(s)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

И здесь, для того чтобы $G(0) = C_1/2\pi$, необходимо перед $dw^{(s)}$ поставить коэффициент $b_0\sqrt{C_1}$, тогда уравнения будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} d\theta_t &= v_t^{(1)} dt; \\ dv_t^{(1)} &= -b_1 v_t^{(1)} dt - b_0 \theta_t dt + b_0 \sqrt{C_1} dw_t^{(s)}. \end{aligned} \right\}$$

Высокочастотный узкополосный сигнал со спектром

$$G(\omega) = \frac{C_1}{2\pi [b_0^2 + (b_1^2 - 2b_0)\omega^2 + \omega^4]}, \quad b_0 - \frac{b_1^2}{4} > 0$$

будет иметь максимум спектральной плотности на частоте

$$\omega_0 = \sqrt{b_0 - b_1^2/4}.$$

Для равенства $G(\omega_0) = C/2\pi$ необходимо, чтобы коэффициент перед $dw_t^{(s)}$ уравнения (1.9) был равен $b_1\sqrt{(b_0 - b_1^2/4)C_1}$, тогда уравнения примут вид

$$\left. \begin{aligned} d\theta_t &= v_t^{(1)} dt; \\ dv_t^{(1)} &= -b_1 v_t^{(1)} dt - b_0 \theta_t dt + b_1 \sqrt{(b_0 - b_1^2/4)C_1} dw_t^{(s)}. \end{aligned} \right\}$$

Эффективное значение сигнала θ_t будет $\sqrt{b_1(b_0 - b_1^2/4)C_1/2b_0}$ или

приближенно (при $b_0 \gg b_1$) $-\sqrt{b_1 C_1/2}$, а протяженность спектра на уровне 0,5 определится разностью частот ω_0 и $\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 \pm b_1 \sqrt{b_0 - b_1}}$ и приближенно (при $b_0 \gg b_1$) будет равна $\Delta \omega = \omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - b_1 \omega_0}$.

Представляет интерес также обнаружение двух и более сигналов, сдвинутых по времени.

Запаздывающий на h с сигнал можно рассматривать как результат прохождения процесса θ_t через задерживающее звено. В простейшем случае в качестве задерживающего звена может выступать однозвенный RC-фильтр нижних частот. В этом случае (будем называть его случаем одномерной задержки) запаздывающий процесс может быть получен в результате решения уравнения

$$d\theta_t^{(2)} = -\frac{1}{h} \theta_t^{(2)} dt + \frac{1}{h} \theta_t dt.$$

Более точно можно представить запаздывающий процесс, если его рассматривать как результат прохождения процесса θ_t через задерживающее звено, отвечающее нескольким членам разложения $e^{-i\omega h}$ в ряде Паде

$$e^{-i\omega h} = \frac{\sum_{u=0}^n \frac{C_n^u (-i\omega h)^u}{C_{2n}^u u!}}{\sum_{v=0}^n (-1)^v \frac{C_n^v (-i\omega h)^v}{C_{2n}^v v!}}$$

В случае $n=2$ (будем называть этот случай двумерной задержкой) разложение имеет вид

$$e^{-i\omega h} = \frac{\frac{12}{h^2} - \frac{6}{h} (i\omega) + (i\omega)^2}{\frac{12}{h^2} + \frac{6}{h} (i\omega) + (i\omega)^2},$$

а задерживающее звено будет представляться уравнениями

$$dv_t^{(0)} = v_t^{(1)} dt;$$

$$dv_t^{(1)} = -\frac{6}{h} v_t^{(1)} dt - \frac{12}{h^2} v_t^{(0)} dt + \theta_t dt;$$

$$\theta_i^{(2)} = \theta_i - \frac{12}{h} \nu_i^{(1)}.$$

При использовании одномерной и двумерной задержек следует иметь в виду, что величина задержки h должна быть согласована с шириной спектра задерживаемого сигнала. Естественно, что по сравнению с одномерной при двумерной задержке можно имитировать запаздывание сигнала с большей шириной спектра.

1.3. Дифференциалы наблюдаемых воздействий

Последовательные алгоритмы обнаружения сигнала, как отмечалось, удастся составить и эффективно использовать, если наблюдаемые воздействия аддитивны в отношении сигнала, обладают марковскими свойствами и могут быть представлены гауссовскими процессами. На практике эти предположения, как правило, выполняются.

В случае, когда помеха может быть представлена окрашенным шумом, т. е., например, процессом с дифференциалом

$$du_t = -\beta u_t dt + \beta \sqrt{C_2} dw_t^{(n)}, \quad (1.10)$$

а сигнал аналогично представим в виде процесса с

$$d\theta_t = -\alpha \theta_t dt + \alpha \sqrt{C_1} dw_t^{(s)},$$

дифференциал наблюдаемого процесса будет иметь вид

$$d\eta_t = d\theta_t + du_t = -\beta \eta_t dt + (\beta - \alpha) \theta_t dt + \alpha \sqrt{C_1} dw_t^{(s)} + \beta \sqrt{C_2} dw_t^{(n)},$$

а сам процесс η_t оказывается стационарным (за время действия одних помех или за время действия сигнала).

Аналогичный характер будет иметь наблюдаемое воздействие и тогда, когда помеха и сигнал представляются как компоненты многомерных марковских процессов.

В этих случаях не возникает никаких проблем при использовании наблюдаемых воздействий для решения задач обнаружения на ЭВМ: при применении АВМ наблюдаемые воздействия могут непосредственно подаваться на вход машины, при применении ЦВМ — вводиться в виде последовательности отбираемых через малые промежутки времени значений наблюдаемых воздействий.

Таким образом, применительно к ЦВМ прямое считывание значений наблюдаемых воздействий в дискретные моменты времени допустимо тогда, когда сигнал скрыт в окрашенном шуме. Когда алгоритм обнаружения составлен в предположении, что помехой является белый шум, то можно поступать двояко. Можно в выражении (1.10) увеличивать β , тогда спектр u_t будет расширяться и соответственно увеличится область частот, в которой спектральная плотность будет мало отличаться от ее значения в нуле, т. е. от C_2 . Тем самым увеличение β приближает процесс u_t к белому шуму со спектральной плотностью C_2 .

Другая возможность заключается в следующем. Поскольку белый шум не имеет реального смысла, а реален лишь интеграл от него, то под η_t следует понимать интеграл от наблюдаемого процесса

$$\eta_t = \begin{cases} w_t, & \text{одна помеха;} \\ w_t + \int_0^t \theta_s ds, & \text{помеха и сигнал,} \end{cases}$$

или в дифференциальной форме

$$d\eta_t = \begin{cases} dw_t, & \text{одна помеха;} \\ dw_t + \theta_t dt, & \text{помеха и сигнал.} \end{cases}$$

Понятно, что процесс η_t в этом случае перестает быть стационарным и его значения должны браться из предварительно проинтегрированного аналоговым образом наблюдаемого воздействия. Однако это трудно выполнимо, поскольку с увеличением времени дисперсия η_t возрастает, что приводит к переполнению аналоговых интеграторов. Для последующего решения уравнений необходима лишь разность $\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}$. Поэтому интегрирование наблюдаемых воздействий можно производить только за время шага временной дискретизации $\Delta = t_{k+1} - t_k$.

В дальнейшем под η_t будем подразумевать процесс, наблюдаемый на входе системы обнаружения. Процедура обнаружения, предполагающая использование непосредственно наблюдаемых воздействий, предъявляет довольно высокие требования к ЦВМ в отношении быстродействия. Для диапазона частот, нашедших применение в гидроакустике, эти требования не выходят за рамки возможного, и создание цифровых систем обнаружения, работающих в реальном масштабе времени, технически вполне возможно. Тем не менее иногда целесообразно (ценой некоторой потери в эффективности) перейти от алгоритма, предполагающего использование наблюдаемых воздействий, к алгоритму, в котором наблюдаемое воздействие представляет собой процесс, получаемый в результате детектирования и последующей фильтрации воздействий, поступающих на вход системы. В этом случае могут быть ослаблены требования к быстродействию ЦВМ; что технически немаловажно.

Наблюдаемое воздействие протектированное и в какой-то мере усредненное фильтрацией может рассматриваться как новое наблюдаемое воздействие, в котором высокочастотный сигнал проявляется как приращение среднего значения на величину r , а помеха вследствие усредняющего действия фильтрации — как гауссовская. Это так называемый случай вторичной обработки, являющейся дополнением к первичной, если под последней понимать фильтрацию входных воздействий по высокой частоте, детектирование и частичную фильтрацию по низкой частоте.

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА (дискретное время)

Особенности обнаружения сигнала на временном интервале для начала целесообразно рассмотреть на упрощенной модели, когда входное воздействие представляется последовательностью независимых случайных величин, одна из которых „содержит“ сигнал. Это, конечно, сильная идеализация входных воздействий, однако определенный смысл в такой идеализации имеется, так как характерные черты (неопределенность момента воздействия сигнала и его кратковременность) здесь сохранены, а их влияние на алгоритм обнаружения сигнала может быть прослежено наиболее наглядным образом.

2.1. Правило принятия решения о появлении сигнала

Предположим, что появление сигнала задается процессом

$$X_n = \begin{cases} 0, & n < \theta; \\ 1, & n = \theta; \\ 0, & n > \theta. \end{cases}$$

Здесь θ (момент появления сигнала) — случайная величина с функцией распределения $F(\theta)$. Две реализации такого процесса представлены на рис. 1.

Этот процесс не может быть описан с помощью переходных вероятностей и поэтому не является марковским.

Наблюдаемый процесс образуется в результате реализации случайных величин η_n , распределенных для $n \neq \theta$ по закону $F_0(\theta)$ (одна помеха), а для $n = \theta$ — по закону $F_1(\theta)$ (помеха и сигнал). Естественно, что значения наблюдаемого процесса η_n зависят от процесса X_n , и только по наблюдениям за η_n можно судить о значениях X_n .

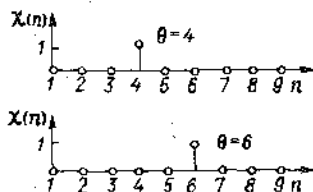


Рис. 1. Реализация процесса появления сигнала.

Необходимо в результате последовательного наблюдения за η_i , $i = 1, \dots, N$ обнаружить появление сигнала, т. е. подать тревогу, когда он появится. В этом случае будет своевременное обнаружение. Если принять, что подача тревоги после воздействия сигнала тоже является полезным эффектом, то можно говорить об обнаружении, допускающем запаздывание. Необходимость своевременного обнаружения или допустимость некоторого запаздывания должны сказываться на процедуре обнаружения. Приемлемость того или иного запаздывания в обнаружении может учитываться функцией выигрыша $W(\nu, \theta)$. Тогда каждому правилу δ принятия решения о появлении сигнала будет соответствовать средний (байесовский) выигрыш

$$U^\delta(\pi_0) = M^\delta W(\nu, \theta),$$

где M^δ — усреднение по мере P^δ , определяемой правилом δ ; π_0 — априорная вероятность наличия сигнала в начале наблюдений.

Правило δ^* из класса K решающих правил δ будет оптимальным, если достигается наибольший средний выигрыш

$$U^{\delta^*}(\pi_0) = \sup_{\delta \in K} M^\delta W(\nu, \theta).$$

Решение об остановке должно основываться на информации, получаемой в результате проведенных наблюдений и производиться путем сравнения ожидаемых перспектив от продолжения наблюдений с выигрышем, который доставит остановка. Для получения максимального выигрыша [2, 31] наблюдения должны продолжаться до тех пор, пока вычисляемый для данной реализации $\eta_1^n = \eta_1, \dots, \eta_n$ выигрыш $g(\eta_1^n)$ не сравняется с наибольшим выигрышем $U_n^N(\eta_1^n)$, получаемым для той же реализации от остановки на интервале $[n, N]$.

Таким образом, момент остановки и принятия решения о появлении сигнала определяется из условия

$$\nu^* = \min [n: g(\eta_1^n) = U_n^N(\eta_1^n)], \quad (2.1)$$

означающего, что нет смысла продолжать наблюдения после того, как ожидаемый выигрыш от последующих наблюдений сравняется с выигрышем, который уже достигнут.

С помощью условия (2.1) могут быть определены статистика (функция от произведенных наблюдений) и граница, разделяющая области принятия решений: область продолжения наблюдений $\mathcal{U}_n^{(+)}$ и область прекращения наблюдений $\mathcal{U}_n^{(-)}$. В результате условие остановки (2.1) эквивалентно следующему: наблюдения должны продолжаться, пока координаты статистики находятся в области $\mathcal{U}_n^{(+)}$, а как только координаты статистики „переходят” в область $\mathcal{U}_n^{(-)}$ — принимается решение о поступлении сигнала и прекращении наблюдений.

Для вычисления $g(\eta_1^n)$ и $U_n^N(\eta_1^n)$ целесообразен байесовский подход, предполагающий, что при выбранном правиле принятия решения об остановке и зафиксированной реализации η_1^n имеется возможность статистически

полностью описать наличие сигнала и значения наблюдаемого процесса в следующий $(n+1)$ момент времени.

Для $U_n^N(\eta_1^n)$ имеет место рекуррентное соотношение

$$U_n^N(\eta_1^n) = \max [g(\eta_1^n), MU_{n+1}^N(\eta_1^n)], \quad (2.2)$$

где $MU_{n+1}^N(\eta_1^n)$ — условное математическое ожидание выигрыша от остановки в один из моментов $n+1, \dots, N$.

В дальнейшем удобно оперировать свывыгршем $V_n^N(\eta_1^n) = U_n^N(\eta_1^n) - g(\eta_1^n)$, определяемым рекуррентным соотношением

$$V_n^N(\eta_1^n) = \max [0, MV_{n+1}^N(\eta_1^n)] \quad (2.3)$$

и условием остановки

$$v^* = \min [n: V_n^N(\eta_1^n) = 0]. \quad (2.4)$$

Вид достаточной статистики можно определить с помощью соотношений (2.3) и (2.4), примененных к конечным моментам интервала наблюдений, поскольку для них выигрыш $V_n^N(\eta_1^n)$ имеет более простое выражение. Граница областей принятия решений определяется с помощью соотношения (2.4). Соотношения (2.3) и (2.4) можно использовать для определения процедуры обнаружения, если процесс, описывающий появление сигнала, является марковским. Примером этого является задача о нахождении наилучшего объекта [8, 17]. Однако, как уже отмечалось, процесс χ_n , описывающий появление и исчезновение сигнала, не является марковским. Это приводит к трудностям в применении байесовского правила для определения процедуры обнаружения. Приходится отступать от точного решения задачи. При этом можно поступать двояко. Можно не обращать внимания на то, что χ_n — немарковский процесс, и находить достаточную статистику так же, как в случае, когда χ_n является марковским, а границу находить методом индукции назад. Другая возможность — это несколько исказить обстановку и тем самым существенно упростить нахождение достаточной статистики и определение границы.

По первому способу для определения границы может быть использован численный метод — метод динамического программирования.

Допустим, что достаточной статистикой является $\pi_n = P(\theta \leq n | \eta_1^n)$. Тогда использование метода динамического программирования может происходить по следующей схеме.

Значение границы Γ_N в силу конечности интервала наблюдений не зависит от π_{N-1} и равно 1.

Значение границы Γ_{N-1} также определяется сразу — как корень Γ_{N-1} уравнения

$$M [g(\pi_N) | \pi_{N-1}] - g(\pi_{N-1}) = 0.$$

Такая возможность следует непосредственно из соотношения (2.4).

Для нахождения значения безусловной границы Γ_{N-2} сначала с помощью статистического эксперимента находим условные границы для момента $N-1$.

С этой целью задаемся значением π_{N-2} и, моделируя π_{N-1} , находим такое значение $\Gamma(N-1|\pi_{N-2})$, при котором выигрыш от продолжения наблюдений $MV_{N-1}^N(\pi_{N-2})$ принимает наибольшее значение

$$\begin{aligned} MV_{N-1}^N(\pi_{N-2}) &= \\ &= \sup_{\Gamma(N-1|\pi_{N-2})} \sum_{i=N-1}^N P(i|\pi_{N-2}) \left\{ M[g(\pi_i)|\pi_{N-2}] - g(\pi_{N-2}) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $P(i|\pi_{N-2})$ — условные вероятности достижения границы в моменты i , получаемые в результате статистического эксперимента.

Значение безусловной границы для момента $N-2$ находится так же, как и для момента $N-1$, — с использованием условия остановки, или, что одно и то же, как корень уравнения

$$MV_{N-1}^N(\pi_{N-2}) = 0.$$

Подобным образом находится условная граница $\Gamma(N-2|\pi_{N-3})$. Для этого путем моделирования статистики π_n находим такое значение $\Gamma(N-2|\pi_{N-3})$, при котором выигрыш от продолжения наблюдений $MV_{N-2}^N(\pi_{N-3})$ принимает наибольшее значение

$$\begin{aligned} MV_{N-2}^N(\pi_{N-3}) &= \\ &= \sup_{\Gamma(N-2|\pi_{N-3})} \sum_{i=N-2}^N P(i|\pi_{N-3}) \left\{ M[g(\pi_i)|\pi_{N-3}] - g(\pi_{N-3}) \right\}. \end{aligned}$$

При моделировании процедуры обнаружения важно помнить, что в процессе подбора условной границы $\Gamma(N-2|\pi_{N-3})$ разыгрываемые значения π_{N-1} должны сравниваться с устанавливаемой по разыгранным значениям π_{N-2} условной границей $\Gamma(N-1|\pi_{N-2})$, но не с безусловной границей Γ_{N-1} . При определении условных границ должны использоваться только условные границы, определенные на предыдущих этапах, а безусловные границы лишь запоминаются.

Значение безусловной границы Γ_{N-3} определяется аналогично нахождению значений границ Γ_{N-1} и Γ_{N-2} . По приведенной схеме находятся и значения границы для моментов $N-4, N-5, \dots, 1$.

Изложенная процедура определения границы одновременно раскрывает смысл $MV_{n+1}^N(\pi_n^n)$, как условного математического ожидания, максимизация которого достигается за счет того, что в процессе статистического эксперимента в каждый момент $i, i > n$ статистика π_i сравнивается с оптимальной условной границей $\Gamma(i|\pi_{i-1})$, определяемой предыдущим значением статистики π_{i-1} . За счет такой адаптации условных границ и достигается наибольшее значение ожидаемого выигрыша от продолжения наблюдений $MV_{n+1}^N(\pi_n^n)$.

Ниже приведены результаты машинного расчета границы, соответствующие следующим условиям: вероятность наступления сигнала $P(\theta) = 0,1$; интервал наблюдения $[1, 10]$; функция выигрыша

$$W(v, \theta) = \begin{cases} 0, & v < \theta; \\ 1 - k(v - \theta), & v \geq \theta, \quad k = 0,1. \end{cases}$$

n	...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Γ_n	...	0,533	0,550	0,583	0,621	0,670	0,714	0,770	0,833	0,909	1,0

Для моделирования использовались соотношения, приведенные в § 2.1, формула для выигрыша от продолжения наблюдений в виде

$$M[g(\pi_{n+i}) | \pi_n] - g(\pi_n) = -ik\pi_n + \frac{1 - \pi_n}{N - n} \left[i - \frac{i(i-1)}{2} k \right]$$

и рекуррентное соотношение (2.10).

Итак, с помощью индукции назад в принципе может быть определена граница. В принципе, потому что при продолжительных интервалах наблюдения приведенная процедура расчета окажется довольно громоздкой, а для случаев, когда статистика многомерна — просто невыполнимой. Более перспективным в практическом отношении является второй способ нахождения границы.

По второму способу байесовское правило заменяется модифицированным байесовским правилом, допускающим некоторое отступление от точного решения задачи.

Модификация заключается в некотором искажении обстановки, т. е. в предположении, что после момента n не будет притока информации и решение о прекращении наблюдений в любой из моментов времени, больших или равных n , будет основываться лишь на наблюдениях, заканчивающихся в момент n . Предположение о том, что после момента n не будет притока информации, упрощает вычисление выигрыша от продолжения наблюдений $MV_{n+1}^N(\eta_n^n)$, что немаловажно для определения процедуры обнаружения сигнала.

Выигрыш от продолжения наблюдений в такой обстановке может быть представлен одной из формул:

$$MV_{n+1}^N(\eta_n^n) = \sup_v \left\{ M[g(\eta_1^v) | \eta_1^n] - g(\eta_1^n) \right\}$$

или

$$MV_{n+1}^N(\eta_n^n) = \sum_{v=n+1}^N \left\{ M[g(\eta_1^v) | \eta_1^n] - g(\eta_1^n) \right\},$$

и именно той, которая даст большее значение $MV_{n+1}^N(\eta_n^n)$.

Нетрудно видеть, что по второму способу определения границы выражения для $MV_{n+1}^N(\eta_1^n)$ не содержат вероятностей достижения границы. Это существенно упрощает расчет границы по сравнению с первым способом.

В варианте МБП оказалось возможным свести обнаружение пачки сигналов к повторяющейся процедуре обнаружения одиночного сигнала. Исходя из этого рассматривается, как правило, обнаружение одиночного сигнала.

В дальнейшем будут необходимы выражения для выигрышей от остановок в момент n и в момент ν , $\nu > n$. Выигрыш от остановки в момент n будет равен

$$g(\eta_1^n) = M_\theta [W(n, \theta) | \eta_1^n] = \sum_{\theta=1}^n W(n, \theta) P(\theta | \eta_1^n),$$

а в момент ν , $\nu > n$ может быть представлен в виде

$$M[g(\eta_1^\nu) | \eta_1^n] = \sum_{\theta=1}^{\nu} W(\nu, \theta) M[P(\theta | \eta_1^\nu) | \eta_1^n] = \sum_{\theta=1}^{\nu} W(\nu, \theta) P(\theta | \eta_1^n).$$

Входящее в это выражение значение апостериорной вероятности определяется следующим способом [23]:

$$\begin{aligned} P(\theta | \eta_1^n) &= \frac{dP(\eta_1^n | \theta) P(\theta)}{dP(\eta_1^n)} \frac{P(\theta > n | \eta_1^n)}{P(\theta > n | \eta_1^n)} = \\ &= (1 - \pi_n) \frac{dP(\eta_1^n | \theta)}{dP(\eta_1^n | \theta > n)} \frac{P(\theta)}{P(\theta > n)} = \\ &= \begin{cases} \varphi_\theta \frac{1 - \pi_n}{P(\theta > n)} P(\theta), & \theta \leq n, \\ \frac{1 - \pi_n}{P(\theta > n)} P(\theta), & \theta > n, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\pi_n = P(\theta \leq n | \eta_1^n)$, а $\varphi_\theta = \frac{dP(\eta_1^n | \theta)}{dP(\eta_1^n | \theta > n)}$ — отношение правдоподобия.

Под $P(\theta)$ понимаются $P(\theta = \hat{\theta})$ (аналогично для апостериорных вероятностей).

Перейдем теперь к непосредственному составлению процедур обнаружения, допускающих малые запаздывания, существенно меньшие временного интервала, на котором появляется сигнал, и большие, сопоставимые с этим интервалом.

2.1.1. Обнаружение, допускающее малые запаздывания

Обнаружение одиночного сигнала. Начнем с частного случая, когда функция выигрыша устроена так, что запаздывания в обнаружении не предполагается:

$$W(v, \theta) = \begin{cases} 0, & v < \theta; \\ 1, & v = \theta; \\ 0, & v > \theta. \end{cases}$$

В этом случае выигрыш от остановки в момент n будет равен

$$g(\eta_1^n) = \pi_n^{(0)},$$

где

$$\pi_n^{(0)} = P(n | \eta_1^n),$$

а выигрыш от продолжения наблюдений равен суммарному выигрышу от остановок на $[n+1, M]$

$$MU_{n+1}^N(\eta_1^n) = \pi_n^{(+)} = 1 - \pi_n,$$

где

$$\pi_n = P(\theta \leq n | \eta_1^n).$$

Из равенства этих выигрышей следует, что в качестве статистики должна выступать величина $\sigma_n = \pi_n^{(0)} + \pi_n$, а в качестве границы $\Gamma_n = 1$.

Как видим, МБП позволяет сравнительно просто определить статистику и границу. Происходит это потому, что выигрыш от продолжения наблюдений вычисляется без учета той дополнительной информации, которая будет иметь место при продолжении наблюдений.

Если допустить небольшие запаздывания введением функции выигрыша

$$W(v, \theta) = \begin{cases} 0, & v < \theta; \\ 1, & v \in [\theta, \theta + m]; \\ 0, & v > \theta + m, \end{cases}$$

то выигрыш от остановки в момент n будет равен

$$g(\eta_1^n) = \pi_n^{(m)} = \frac{1 - \pi_n}{P(\theta > n)} \sum_{i=0}^m \varphi_{n-i} P(n-i),$$

где

$$\pi_n^{(m)} = P\left\{\theta \in [n-m, n] | \eta_1^n\right\},$$

а выигрыш от продолжения наблюдений будет равен

$$MU_{n+1}^N(\eta_1^n) = 1 - \pi_n.$$

Из равенства этих выигрышей следует, что статистикой может быть принята величина

$$\sigma_n = \frac{1 - \pi_n}{P(\theta > n)} \sum_{i=0}^m \varphi_{n-i} P(n-i) + \pi_n,$$

а в качестве границы — $\Gamma_n = i$.

Заметим, что обнаружение без запаздываний получается, как частный случай, при $m = 0$.

Обнаружение пачки сигналов. К случаю малых запаздываний может быть отнесено также обнаружение пачки сигналов, если под малостью понимать возможность обнаружения за время продолжительности пачки.

Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай, когда пачка содержит сигналы, имеющие одинаковую задержку по отношению к началу цикла. Для этого весь интервал наблюдений $[1, N]$ разбивается на подынтервалы $[1, M]$, $[M + 1, 2M]$, ..., соответствующие циклам работы локатора. Предполагается, что сигнал, появившись в одном цикле, будет с одинаковыми задержками появляться в m последующих циклах.

Обнаружение строится таким образом, что в каждом цикле принимается свой отсчет времени и тем самым все входные воздействия оказываются заданными на одном и том же временном интервале $[1, M]$. При таком подходе обнаружение, ведущееся в последующем цикле, использует в качестве априорного распределения $P^{(i)}(\theta)$ апостериорное распределение $P^{(i-1)}(\theta | \pi_1^M)$, вычисленное на предыдущем цикле. Тем самым результат наблюдения на предыдущем цикле учитывается при обнаружении сигнала на последующем цикле.

Если на предыдущем цикле сигнал отсутствовал, то распределение $P^{(i)}(\theta | \pi_1^M)$ будет, как правило, мало отличаться от $P^{(i)}(\theta)$. Если же на предыдущем цикле сигнал имел место, то $P^{(i)}(\theta | \pi_1^M)$ изменится по сравнению с $P^{(i)}(\theta)$ и будет иметь большие значения при n , близких или равных моменту θ действительного поступления сигнала, причем в последующих циклах такая деформация распределения будет приобретать все более выраженный характер. Это обстоятельство в конечном счете будет приводить к принятию решения о прекращении наблюдений (моменту достижения статистикой границы) в момент действительного поступления сигнала.

Изложенная процедура сохраняет преимущества последовательного характера обнаружения, логически достаточно обоснована, но требует удержания в памяти ЦВМ результатов вычислений, относящихся к предыдущему циклу.

2.1.2. Обнаружение, допускающее большие запаздывания

Начнем также с частного случая, когда функция выигрыша имеет вид

$$W(v, \theta) = \begin{cases} 0, & v < \theta; \\ 1 - k(v - \theta), & v \geq \theta. \end{cases} \quad (2.6)$$

Заметим, что эта функция выигрыша приводит к той же процедуре обнаружения (той же статистике и той же границе), что и функция потерь

$$\bar{W}(\nu, \theta) = \begin{cases} 1, & \nu < \theta; \\ k(\nu - \theta), & \nu \geq \theta, \end{cases}$$

предполагающая, что при обнаружении должен минимизироваться средний риск

$$R^{\delta}(\pi_0) = P(\nu < \theta) + kM[(\nu - \theta) | \nu \geq \theta] P(\nu \geq \theta),$$

т. е. вероятность ложной тревоги и среднее время запаздывания в обнаружении сигнала.

Но минимум этих ошибок, в частности, минимум среднего времени запаздывания — это как раз то, ради чего вообще рассматривается обнаружение, допускающее большие запаздывания.

Дело в том, что допущение больших запаздываний в обнаружении приводит к большой неопределенности относительно момента воздействия сигнала. Поэтому такое обнаружение имеет смысл сочетать с последующим доопределением момента появления сигнала. В результате качество обнаружения будет определяться вероятностью правильного определения момента появления сигнала и тем временем, которое затрачивается на наблюдение. Чем больше вероятность и чем меньше время, затрачиваемое на наблюдение, тем выше эффективность обнаружения.

В условиях функции выигрыша (2.6) выигрыш от продолжения наблюдений должен вычисляться по формуле

$$M V_{n+1}^N(\eta_1^n) = \sup_{\nu} \left\{ M [g(\eta_1^{\nu}) | \eta_1^n] - g(\eta_1^n) \right\}. \quad (2.7)$$

Согласно этому выражению, найдем вид достаточной статистики. Для этого определим $g(\eta_1^n)$, $M [g(\eta_1^{\nu}) | \eta_1^n]$ и их разность.

Выигрыш от остановки в момент n будет равен

$$g(\eta_1^n) = \sum_{\theta=1}^n [1 - k(n - \theta)] P(\theta | \eta_1^n),$$

Выигрыш от остановки в момент ν , $\nu > n$ может быть представлен в виде

$$M [g(\eta_1^{\nu}) | \eta_1^n] =$$

$$+ \sum_{\theta=1}^n [1 - k(\nu - \theta)] P(\theta | \eta_1^n) + \sum_{\theta=n+1}^{\nu} [1 - k(\nu - \theta)] P(\theta | \eta_1^n).$$

Разность этих выигрышей будет равна

$$\begin{aligned}
 M [g(\eta_1^v) | \eta_1^n] - g(\eta_1^n) &= \\
 &= -k(v-n)[P(1 | \eta_1^n) + \dots + P(n | \eta_1^n)] + \sum_{\theta=n+1}^v [1-k(v-\theta)] P(\theta | \eta_1^n) = \\
 &= -k(v-n)\pi_n + \sum_{\theta=n+1}^v [1-k(v-\theta)] P(\theta | \eta_1^n).
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в качестве статистики может выступать величина π_n , а граница находится в ее координатах.

Теперь перейдем к определению границы. Перепишем формулу (2.7) в координатах статистики, т. е. в виде

$$M V_{n+1}^N(\pi_n) = \sup_{\nu} \left\{ M [g(\pi_\nu) | \pi_n] - g(\pi_n) \right\}.$$

Видно, что $M V_{n+1}^N(\pi_n)$ — функция убывающая, более того, монотонно убывающая. Такой характер она имеет потому, что при малых значениях π_n вероятность поступления сигнала на интервале $[n+1, N]$ велика (равна $1 - \pi_n$), по мере же возрастания π_n эта вероятность снижается и, естественно, снижается тот выигрыш, который возможен от продолжения наблюдений.

В зависимости от характера распределения момента появления сигнала (вероятность $P(\theta)$) выигрыш от продолжения наблюдений, как следует из формулы (2.7), может совпадать с выигрышем от продолжения наблюдений на один шаг или с выигрышем от продолжения наблюдений на несколько шагов. Поэтому и граница будет определяться по выигрышу от продолжения наблюдений на соответствующее число шагов. Это обстоятельство существенно при задании границ для повторного поиска, при котором характер апостериорного распределения $P(\theta | \eta_1^n)$ в сильной степени зависит от складывающейся обстановки.

В случае равномерного распределения момента появления сигнала на интервале наблюдений выигрыш от продолжения наблюдений на один шаг оказывается наибольшим и поэтому $M V_{n+1}^N(\pi_n)$ может быть к нему приравнен. Такая возможность сохраняется и для всех монотонно спадающих с увеличением n распределений.

В таких случаях нахождение границы, как корня π_n уравнения

$$M V_{n+1}^N(\pi_n) = 0,$$

сводится к решению уравнения

$$M [g(\pi_{n+1}) | \pi_n] - g(\pi_n) = 0.$$

Проиллюстрируем нахождение границы примером, когда момент воздействия сигнала равномерно распределен на $[1, N]$.

Для момента $n = N - 3$ значения $V_{N-2}^N(\pi_{N-3})$ и $[g(\pi_\nu) | \pi_N] - g(\pi_N)$ определяются формулами

$$M [g(\pi_{N-2}) | \pi_{N-3}] - g(\pi_{N-3}) = -k\pi_{N-3} + \frac{1}{3} (1 - \pi_{N-3});$$

$$M [g(\pi_{N-1}) | \pi_{N-3}] - g(\pi_{N-3}) = -2k\pi_{N-3} + \frac{1}{3} (1 - \pi_{N-3})(2 - k);$$

$$M [g(\pi_N) | \pi_{N-3}] - g(\pi_{N-3}) = -3k\pi_{N-3} + \frac{1}{3} (1 - \pi_{N-3})(3 - 3k).$$

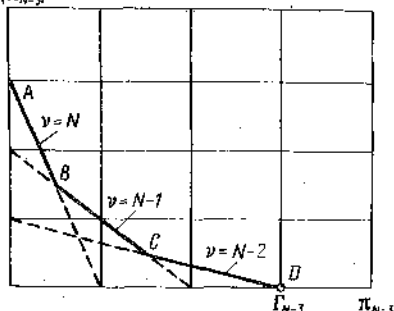


Рис. 2. Выигрыш от продолжения наблюдений.

График функции $MV_{N-2}^N(\pi_{N-3})$ дан сплошной ломаной линией на рис. 2. Отрезки CD , BC , AB представляют собой выигрыш от продолжения наблюдений до моментов $N - 2$, $N - 1$, N . Пока $\pi_{N-3} < \Gamma_{N-3}$, принимается решение о продолжении наблюдений, в случае $\pi_{N-3} \geq \Gamma_{N-3}$ принимается решение об остановке. Положение точки Γ_{N-3} определяется приравнением нулю выигрыша от продолжения наблюдений на один шаг, т. е.

$$-k\pi_{N-3} + \frac{1}{3} (1 - \pi_{N-3}) = 0.$$

Вообще же для случая, когда момент появления сигнала равномерно распределен на $[1, N]$, граница определяется формулой

$$\Gamma_n = \frac{1}{1 + k(N - n)}.$$

Может оказаться целесообразным допустить несколько меньшее зашумление, учитываемое функцией выигрыша

$$W(\nu, \theta) = \begin{cases} 0, & \nu < \theta; \\ e^{-k(\nu - \theta)}, & \nu \geq \theta \end{cases} \quad (2.8)$$

и соответствующим значением k .

В этом случае выигрыш от остановки в момент n будет равен

$$g(\eta_1^n) = \frac{1 - \pi_n}{P(\theta > n)} \sum_{\theta=1}^{n-1} e^{-k(n-\theta)} \varphi_{\theta} P(\theta) + \pi_n^{(0)},$$

а в момент $n+1$

$$M[g(\eta_1^{n+1}) | \eta_1^n] = \frac{1 - \pi_n}{P(\theta > n)} [e^{-k(n+1)} \sum_{\theta=1}^{n-1} e^{k\theta} \varphi_{\theta} P(\theta) + P(n+1)] + \pi_n^{(0)} e^{-k}.$$

Если предположить, что при выборном распределении момента появления сигнала вид достаточной статистики и значение границы могут быть определены из равенства $g(\eta_1^n)$ и $M[g(\eta_1^{n+1}) | \eta_1^n]$, то в качестве статистики принимается величина

$$\sigma_n = (1 - e^{-k}) [e^{-kn} \alpha_{n-1}^* + P(\theta > n) \pi_n^{(0)}] + [P(n+1) - (1 - e^{-k}) e^{-kn} \alpha_{n-1}^*] \pi_n,$$

где

$$\alpha_{n-1}^* = \sum_{\theta=1}^{n-1} e^{k\theta} \varphi_{\theta} P(\theta),$$

причем

$$\alpha_{n-1}^* = \alpha_{n-2}^* + e^{(n-1)k} \varphi_{n-1} P(n-1),$$

а граница определяется равенством $\Gamma_n = P(n+1)$.

Заметим, что ранее рассмотренный случай обнаружения в условиях линейной функции выигрыша является, по существу, приближением обнаружения в условиях экспоненциальной функции выигрыша (2.8) при малых значениях k .

После принятия решения о появлении сигнала, как уже отмечалось, предполагается доопределение момента его появления. Такое доопределение может заключаться в принятии решения о том, что сигнал имел место в момент для которого апостериорная вероятность его наличия максимальна: $\theta = \arg \max P(s | \eta_1^{k*})$.

Доопределение момента появления сигнала предполагает наличие в памяти ЦВМ информации о наблюдениях до момента n_* значений входных воздействий, но не требует дополнительных затрат реального времени (см. § 2).

Если обнаружение, допускающее большие запаздывания, дополнить повторным поиском, организуемым в обратном направлении, т. е. затратить еще дополнительное время на наблюдение, то появится возможность дальнейшего увеличения вероятности правильного определения момента появления сигнала.

Увеличение вероятности правильного определения момента появления сигнала происходит вследствие того, что повторный поиск проводится в более благоприятных условиях, поскольку апостериорное распределение момента появления сигнала, как правило, будет в большей степени, чем априорное, сосредоточено в районе действительного момента воздействия сигнала. С помощью апостериорного распределения момента появления сигнала происходит своего рода накопление информации об этом моменте.

2.2. Рекуррентные соотношения для статистик

В задачах обнаружения (см. § 2.1) необходимо для каждого момента времени n на основании проведенных наблюдений $\eta_1^n = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ принять решения о значениях χ_n .

Объем информации η_1, \dots, η_n с течением времени n возрастает, и если предусмотреть замены этих данных статистикой меньшего размера, то удастся определить процедуру обнаружения. Естественно, что такое решение накапливающейся у наблюдения информации должно происходить с ущербом, без потерь для определения оптимальной процедуры обнаружения.

К моменту n все то, что становится известным наблюдателю относительно процесса χ_n , заключено в распределении вероятностей $P(\theta_i | \eta_1^n)$, $i = 1, \dots, n$, подсчитываемом по результатам наблюдения η_1, \dots, η_n .

Апостериорные вероятности $\pi_n^{(0)}$, $\pi_n^{(m)}$, π_n , а также статистика a_n^* достаточны для составления процедуры обнаружения (см. § 2.1). В результате можно оперировать не со всеми прошлыми данными, а только с апостериорными вероятностями или с их характеристиками.

Рассмотрим возможность вычисления этих статистик. Можно было бы пользоваться формулой Байеса, однако полученные по этой формуле выражения громоздки и малоприспособны для практики. Чтобы вычисления оказались реальными, необходимо формулам для вычисления этих статистик придать рекуррентный характер. Имеется в виду возможность вычисления статистики в момент $n+1$ с использованием наблюдений в момент $n+1$ и значения статистики в предыдущий момент n .

Выполнение такой процедуры возможно только при марковской статистике. Именно в этом случае можно пересчитывать значения статистики в момент n к моменту $n+1$, занимая в цифровой машине столько ячеек памяти, какова размерность статистики.

Возможность составления рекуррентных соотношений в рассматриваемом случае дискретного времени во многом определяет и возможность составления для случая непрерывного времени стохастических дифференциальных уравнений для аналогичных статистик; ради чего, собственно, и ведется рассмотрение.

Перейдем к выводу рекуррентных соотношений для статистик

Исходным моментом в составлении рекуррентных соотношений является формула Байеса. В соответствии с этой формулой статистика π_{n+1} может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \pi_{n+1} &= P(\theta \leq n+1 | \eta_1^{n+1}) = P(\theta \leq n | \eta_1^{n+1}) + P(n+1 | \eta_1^{n+1}) = \\ &= P(\theta \leq n | \eta_1^n, \eta_{n+1}) + P(n+1 | \eta_1^n, \eta_{n+1}) = \\ &= \frac{P(\theta \leq n | \eta_1^n, \eta_{n+1})f(\eta_{n+1} | \eta_1^n) + P(n+1 | \eta_1^n, \eta_{n+1})f(\eta_{n+1} | \eta_1^n)}{f(\eta_{n+1} | \eta_1^n)} = \\ &= \frac{P(\theta \leq n | \eta_1^n)f(\eta_{n+1} | \theta \leq n, \eta_1^n) + P(n+1 | \eta_1^n)f(\eta_{n+1} | n+1, \eta_1^n)}{f(\eta_{n+1} | \eta_1^n)}. \end{aligned}$$

Поскольку при зафиксированной реализации η_1^n событие, состоящее в поступлении случайной величины η_{n+1} , может сочетаться с одним из событий $\theta \leq n$, $\theta = n+1$ или $\theta > n+1$, составляющими полную группу событий, плотность распределения $f(\eta_{n+1} | \eta_1^n)$ можем представить в виде

$$\begin{aligned} f(\eta_{n+1} | \eta_1^n) &= f(\eta_{n+1} | \theta \leq n, \eta_1^n)P(\theta \leq n | \eta_1^n) + f(\eta_{n+1} | n+1, \eta_1^n)P(n+1 | \eta_1^n) \\ &+ f(\eta_{n+1} | \theta > n+1, \eta_1^n)P(\theta > n+1 | \eta_1^n). \end{aligned}$$

Тогда

$$\pi_{n+1} = \frac{P(\theta \leq n | \eta_1^n)f_0(\eta_{n+1}) + P(n+1 | \eta_1^n)f_1(\eta_{n+1})}{P(\theta \leq n | \eta_1^n)f_0(\eta_{n+1}) + P(n+1 | \eta_1^n)f_1(\eta_{n+1}) + P(\theta > n+1 | \eta_1^n)f_0(\eta_{n+1})}, \quad (2.9)$$

где индексы 0 и 1 означают отсутствие и наличие сигнала в момент $n+1$ соответственно.

Необходимые для соотношения (2.9) апостериорные вероятности могут быть получены с помощью апостериорных вероятностей наличия сигнала в разные моменты времени. Напомним, что последние, согласно выражению (2.5), могут быть представлены в виде

$$P(\theta | \eta_1^n) = \begin{cases} \varphi_\theta \frac{1 - \pi_n}{P(\theta > n)} P(\theta), & \theta \leq n; \\ \frac{1 - \pi_n}{P(\theta > n)} P(\theta), & \theta > n. \end{cases}$$

Поэтому входящие в рекуррентное соотношение (2.9) вероятности могут быть определены следующим образом:

$$\begin{aligned} P(n+1 | \eta_1^n) &= \frac{P(n+1)}{P(\theta > n)} (1 - \pi_n); \\ P(\theta > n+1 | \eta_1^n) &= 1 - P(\theta \leq n | \eta_1^n) - P(n+1 | \eta_1^n). \end{aligned}$$

Обозначив через φ_{n+1} отношение $\frac{f_1(\eta_{n+1})}{f_0(\eta_{n+1})}$, получим рекуррентные

соотношения для π_n в виде

$$\pi_{n+1} = A(n, n+1) / [A(n, n+1) + B(n, n+1)],$$

где

$$A(n, n+1) = \pi_n + (1 - \pi_n)P(n+1)[P(\theta > n)]^{-1}\varphi_{n+1}; \quad (2.10)$$

$$B(n, n+1) = (1 - \pi_n) \left\{ 1 - P(n+1)[P(\theta > n)]^{-1} \right\}.$$

Нетрудно видеть, что статистика π_n^* является неубывающей функцией времени.

Обратим внимание на одно свойство статистики π_n и границы Γ_n , определяемых с помощью МБП: если статистика π_n равна Γ_n , то в следующий момент ее значение π_{n+1} будет равно или больше границы Γ_{n+1} . Это можно проверить, если с помощью рекуррентного соотношения вычислить π_{n+1} , задавая $\pi_n = \Gamma_n$ в предположении, что $\varphi_{n+1} = 0$ (это самый крайний случай, так как при $\varphi_{n+1} > 0$ значение π_{n+1} лишь возрастает).

Аналогично π_n можно показать, что для $\pi_n^{(0)} = P(n|\eta_1^n)$ справедливо рекуррентное соотношение

$$\pi_{n+1}^{(0)} = \frac{\pi_n^{(0)} \varphi_{n+1} P(n+1)}{\pi_n^{(0)} (\varphi_{n+1} - 1) P(n+1) + \varphi_n P(n)}. \quad (2.11)$$

В случае, когда для $P(\theta)$ отсутствует аналитическое представление, рекуррентные соотношения для статистик могут быть получены с помощью соотношений (2.10) и (2.11). Так, при повторном поиске, организуемом в обратном направлении, выражения для $\pi_i^{(0)}$; и π_i , где i — нумерация справа налево, получаются с использованием нового априорного распределения $P(s)$, образуемого из апостериорных вероятностей $P(\theta|\eta_1^{n*})$. В этом случае рекуррентные соотношения для статистики примут вид

$$\pi_{i+1} = A(i, i+1) / [A(i, i+1) + B(i, i+1)],$$

где

$$A(i, i+1) = \pi_i + (1 - \pi_i)P^{(2)}(i+1) \left[\sum_{j=i+1}^N P^{(2)}(j) \right]^{-1} \varphi_{i+1};$$

$$B(i, i+1) = (1 - \pi_i) \left\{ 1 - P^{(2)}(i+1) \left[\sum_{j=i+1}^N P^{(2)}(j) \right]^{-1} \right\},$$

$$\pi_{i+1}^{(0)} = \frac{\pi_i^{(0)} \varphi_{i+1} P(i+1)}{\pi_i^{(0)} (\varphi_{i+1} - 1) P(i+1) + \varphi_i P(i)}$$

при начальных значениях $\pi_{i*} = 1 - [P(i+1) + \dots + P(N)]$, $\pi_{i*}^{(0)} = P(i)$.

Таким образом, апостериорное распределение (значения $P(\theta | \tau_1^{n*})$) должно быть вычислено в момент остановки n_* и храниться в памяти машины в течение всего повторного поиска.

В заключение рассмотрим примеры на составление рекуррентных соотношений для статистик π_n и $\pi_n^{(0)}$ для разных распределений момента появления сигнала.

Пример 1. Равномерное распределение

$$P(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < 0, \\ 1/N, & \theta \in \{1, N\}; \\ 0, & \theta > N. \end{cases}$$

В этом случае рекуррентные соотношения для статистик имеют вид

$$\pi_{n+1} = \frac{\pi_n (N-n) + (1-\pi_n) \varphi_{n+1}}{\pi_n (N-n) + (1-\pi_n) \varphi_{n+1} + (1-\pi_n) [N-(n+1)]};$$

$$\pi_{n+1}^{(0)} = \frac{\pi_n^{(0)} \varphi_{n+1}}{\pi_n^{(0)} (\varphi_{n+1} - 1) + \varphi_n}$$

при начальных значениях

$$\pi_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + (N-1)}, \quad \pi_1^{(0)} = \pi_1.$$

Пример 2. Монотонно спадающее распределение

$$P(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \leq 0; \\ (1-\epsilon)^{\theta-1} \epsilon, & \theta > 0. \end{cases}$$

Рекуррентные соотношения для статистик примут вид

$$\pi_{n+1} = \frac{\pi_n + (1-\pi_n) \epsilon \varphi_{n+1}}{\pi_n + (1-\pi_n) \epsilon \varphi_{n+1} + (1-\pi_n) (1-\epsilon)};$$

$$\pi_{n+1}^{(0)} = \frac{\pi_n^{(0)} \varphi_{n+1} (1-\epsilon)}{\pi_n^{(0)} (\varphi_{n+1} - 1) (1-\epsilon) + \varphi_n}$$

при начальных значениях

$$\pi_1 = \frac{\epsilon \varphi_1}{\epsilon (\varphi_1 - 1) + 1}, \quad \pi_1^{(0)} = \pi_1.$$

Пример 3. Линейно возрастающее распределение

$$P(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < 0; \\ \frac{2\theta}{N(N+1)}, & \theta \in [1, N]; \\ 0, & \theta > N. \end{cases}$$

В этом случае рекуррентные соотношения для статистик имеют вид

$$\pi_{n+1} = A(n, n+1) / [A(n, n+1) + B(n, n+1)],$$

где

$$A(n, n+1) = \pi_n + 2(1 - \pi_n)(n+1)[N(N+1) - n(n+1)]^{-1} \varphi_{n+1};$$

$$B(n, n+1) = (1 - \pi_n) \left\{ 1 - 2(n+1)[N(N+1) - n(n+1)]^{-1} \right\},$$

$$\pi_{n+1}^{(0)} = \frac{\pi_n^{(0)} \varphi_{n+1} (n+1)}{\pi_n^{(0)} (\varphi_{n+1} - 1)(n+1) + \varphi_n n}$$

при начальных значениях

$$\pi_1 = \frac{2\varphi_1}{2\varphi_1 + N(N+1) - 2}, \quad \pi_1^{(0)} = \pi_1.$$

2.3. Эффективность процедур обнаружения сигнала

Перейдем к анализу эффективности МБП для определения процедуры обнаружения, а также к оценке зависимости вероятности обнаружения от допустимого запаздывания в принятии решения о появлении сигнала. Для этого вычислим вероятность своевременного обнаружения, т. е. вероятность прекращения наблюдений в момент появления сигнала; вероятность ложной тревоги — вероятность прекращения наблюдений до наступления сигнала; средний выигрыш и среднее число шагов, затрачиваемых на наблюдение. В случае обнаружения, допускающего большие запаздывания, вычислим также вероятность правильного определения момента появления сигнала, т. е. вероятность того, что вычисленный после прекращения наблюдений момент появления сигнала совпадает с моментом действительного его появления.

Расчет характеристик, определяющих эффективность обнаружения, в принципе возможен с помощью аналитических методов, однако неизбежность численного подсчета многомерных интегралов, появляющихся на этом пути, делает задачу чрезвычайно громоздкой. Метод статистических испытаний позволяет решить эту задачу более экономными средствами и скорее приводит к результату.

При проведении статистических испытаний разыгрывается момент θ воздействия сигнала и значение помех x_n . Затем вычисляются последовательные значения статистики, используемой для обнаружения. Путем сравнения этой статистики с границей Γ_n принимается решение о продолжении наблюдений либо решение о появлении сигнала и прекращении наблюдений, при этом подсчитываются средний выигрыш, число ложных тревог и общее число шагов, затрачиваемых на наблюдение.

При обнаружении, допускающем большие запаздывания, дополнительно определяется момент появления сигнала, как момент, для которого вероятность $P(\theta | \eta_1^{(k)}) = \max$. Для этого, как будет показано, достаточно помнить в ЦВМ момент, соответствующий максимальному значению произведения $\varphi_n P(\theta)$.

Путем повторения опытов численные значения, характеризующие эффективность процедур обнаружения, могут быть определены с приемлемой для практики точностью.

2.3.1. Обнаружение, допускающее малые запаздывания

Обнаружение одиночного сигнала. Покажем, что МБП эффективно для определения процедуры обнаружения и допущение запаздываний позволяет увеличить вероятность обнаружения.

В случае своевременного обнаружения, когда

$$W(\nu, \theta) = \begin{cases} 0, & \nu < \theta; \\ 1, & \nu = \theta; \\ 0, & \nu > \theta, \end{cases}$$

для обнаружения используется статистика $\sigma_n = \pi_n^{(0)} + \pi_n$ и граница $\Gamma_n = 1$.

Если допускаются запаздывания на m шагов, т. е. когда

$$W(\nu, \theta) = \begin{cases} 0, & \nu < \theta; \\ 1, & \nu \in [\theta, \theta + m]; \\ 0, & \nu > \theta + m, \end{cases}$$

для обнаружения используется статистика $\sigma_n = \pi_n^{(m)} + \pi_n$ и граница $\Gamma_n = 1$.

Когда момент появления сигнала равномерно распределен на $[1, M]$, а сам сигнал равен r , рекуррентные соотношения для $\pi_n^{(0)}$, $\pi_n^{(m)}$ и π_n имеют вид

$$\pi_{n+1}^{(0)} = \frac{\pi_n^{(0)} \varphi_{n+1}}{\pi_n^{(0)} (\varphi_{n+1} - 1) + \varphi_n};$$

$$\pi_n^{(m)} = \frac{\sum_{j=n-m}^n \varphi_j}{N-n} (1 - \pi_n);$$

$$\pi_{n+1} = \frac{\pi_n(N-n) + (1 - \pi_n)\varphi_{n+1}}{\pi_n(N-n) + (1 - \pi_n)\varphi_{n+1} + (1 - \pi_n)[N - (n+1)]},$$

где $\varphi_n = e^{r \eta_n - r^2/2}$ и

$$\eta_n = \begin{cases} x_n, & \text{одна помеха;} \\ x_n + r, & \text{помеха и сигнал.} \end{cases}$$

Как отмечалось, под малыми запаздываниями понимаются такие, которые существенно меньше интервала $[1, M]$. Если такой интервал значителен (например, $N=100$), то малыми запаздываниями могут считаться и такие, которые исчисляются несколькими шагами. В этом позволяет удостовериться статистический эксперимент в условиях, когда были взяты $N=10(m=1, 2, 3, 4)$ и $N=100(m=10, 20, 30, 40)$.

Полученные с помощью усреднения по 10^4 реализациям результаты приведены на рис. 3. Сплошными линиями здесь соединены значения вероятностей обнаружения (средних выигрышей), соответствующих расчетной границе, а штриховыми – наибольшие значения, которые были получены в результате подбора границы (небольшого ее повышения).

По мере увеличения допустимого запаздывания процедура, определенная с помощью МБП, не позволяет получать наибольший средний выигрыш (вероятность обнаружения). Однако отличие получаемого среднего выигрыша от наибольшего невелико, а в условиях, когда неопределенность в моменте появления сигнала ненамного (не более чем на порядок) превышает продолжительность воздействия сигнала, может вообще не приниматься во внимание.

Аналогичные результаты имели место при других значениях r , а также тогда, когда распределение момента появления сигнала было неравномерно: линейно возрастающее на $[1, N]$ или экспоненциально спадающее (см. примеры 2 и 3).

Таким образом, можно считать, что расчетная граница в случае своевременного обнаружения и обнаружения, допускающего малые запаздывания, является оптимальной и допущение запаздываний приводит к увеличению вероятности обнаружения.

Обнаружение пачки сигналов. Покажем, что МБП может эффективно применяться и в случае обнаружения пачки сигналов.

Рассмотрим случай, когда распределение момента появления сигнала равномерно на $[1, N]$, т. е. априорное распределение представляется вероятностью $P(\theta) = 1/N$.

В течение первого цикла статистика $\sigma_n^{(1)} = \pi_n^{(1)} + \pi_n^{(0)}$ вычисляется с помощью рекуррентных соотношений

$$\pi_{n+1}^{(1)} = \frac{\pi_n^{(1)} + (1 - \pi_n^{(1)}) (N - n)^{-1} \varphi_{n+1}^{(1)}}{\pi_n^{(1)} + (1 - \pi_n^{(1)}) (N - n)^{-1} \varphi_{n+1}^{(1)} + (1 - \pi_n^{(1)}) [1 - (N - n)^{-1}]}, \pi_0^{(1)} = 0;$$

$$\pi_{n+1}^{(0)} = \frac{\pi_n^{(0)} \varphi_{n+1}^{(1)} P^{(1)}(n+1)}{\pi_n^{(0)} (\varphi_{n+1}^{(1)} - 1) P^{(1)}(n+1) + \varphi_n^{(1)} P^{(1)}(n)}, \pi_1^{(0)} = \pi_1^{(1)}.$$

Так вычисляемая статика $\sigma_n^{(1)}$ сравнивается с границей $\Gamma_n = 1$. Если граница достигается, то принимается решение о наличии сигнала и наблюдения

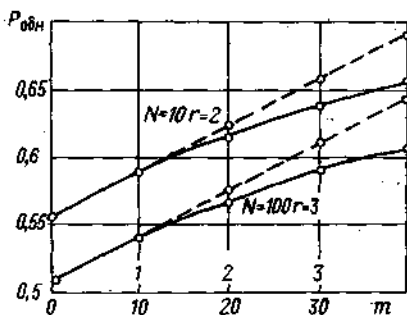


Рис. 3. Вероятность своевременного обнаружения сигнала.

прекращаются. Если $\sigma_n^{(1)}$ в течение цикла границы не достигает, то по достижении момента M вычисляется $\pi_M^{(1)}$ и определяются $P^{(1)}(\theta | \pi_1^M)$, представляющие апостериорное распределение возможных моментов поступления сигнала

$$P^{(1)}(\theta | \pi_1^M) = \begin{cases} \varphi_n^{(1)} (1 - \pi_M^{(1)}) \frac{1}{N - M}, & \theta \leq M; \\ (1 - \pi_M^{(1)}) \frac{1}{N - M}, & \theta > M. \end{cases}$$

Во втором цикле обнаружению сигнала предшествует определение априорного распределения в виде

$$P^{(2)}(\theta) = \begin{cases} P^{(1)}(\theta | \pi_1^M), & \pi_M^{(1)} \geq \frac{M}{N}; \\ \frac{1}{N - M}, & \pi_M^{(1)} < \frac{M}{N}. \end{cases}$$

Статистика $\sigma_n^{(2)} = \pi_n^{(2)} + \pi_n^{(0)(2)}$ вычисляется с помощью рекуррентных соотношений

$$\pi_{n+1}^{(2)} = A(n, n+1) / [A(n, n+1) + B(n, n+1)],$$

где

$$A(n, n+1) = \pi_n^{(2)} + (1 - \pi_n^{(2)}) P^{(2)}(n+1) \left[\sum_{j=i+1}^M P^{(2)}(j) + P_*^{(2)}(\theta) (N - 2M) \right]^{-1} \varphi_{n+1}^{(2)};$$

$$B(n, n+1) = (1 - \pi_n^{(2)}) \left\{ 1 - P^{(2)}(n+1) \left[\sum_{j=i+1}^M P^{(2)}(j) + P_*^{(2)}(\theta) (N - 2M) \right]^{-1} \right\},$$

$$\pi_{n+1}^{(0)(2)} = \frac{\pi_n^{(0)(2)} \varphi_{n+1}^{(2)} P^{(2)}(n+1)}{\pi_n^{(0)(2)} (\varphi_{n+1}^{(2)} - 1) P^{(2)}(n+1) + \varphi_n^{(2)} P^{(2)}(n)},$$

где $P_*^{(2)}(\theta)$ — значение $P^{(2)}(\theta)$, соответствующее случаю $\theta > M$, а в качестве начальных условий принимаются $\pi_0^{(2)} = 0$ и $\pi_1^{(0)(2)} = \pi_1^{(2)}$.

Статистика $\sigma_n^{(2)}$ сравнивается с $\Gamma_n = 1$. Если граница достигается, то принимается решение о наличии сигнала и прекращении наблюдений.

Если $\sigma_n^{(2)}$ не достигает границы, то в момент M вычисляется $\pi_M^{(2)}$ и определяются $P^{(2)}(\theta | \eta_1^M)$ по формуле

$$P^{(2)}(\theta | \eta_1^M) = \begin{cases} \varphi_n^{(2)}(1 - \pi_M^{(2)}) \frac{P^{(2)}(\theta)}{P_*^{(2)}(\theta)(N - 2M)}, & \theta \leq M; \\ (1 - \pi_M^{(2)}) \frac{1}{N - 2M}, & \theta > M. \end{cases}$$

В третьем цикле обнаружению сигнала предшествует определение априорного распределения $P^{(3)}(\theta)$:

$$P^{(3)}(\theta) = \begin{cases} P^{(2)}(\theta | \eta_1^M), & \pi_M^{(2)} \geq \frac{M}{N - M}; \\ \frac{1}{N - 2M}, & \pi_M^{(2)} < \frac{M}{N - M}. \end{cases}$$

Статистика $\sigma_n^{(3)} = \pi_n^{(3)} + \pi_n^{(0)(3)}$ вычисляется с помощью рекуррентных соотношений, отличающихся от соотношений для второго цикла тем, что индекс 2 заменяется на 3, а сомножитель $N - 2M$ на $N - 3M$. Такие же изменения претерпевает и формула для вычисления $P^{(3)}(\theta | \eta_1^M)$.

Аналогичным образом определяется процедура вычислений для последующих циклов.

Для случая, когда $N = 100$, $P^{(1)}(\theta) = 1/N$, $M = 10$ и пачки, состоящей из трех сигналов (сигнал поступал в моменты 34, 44, 54), на рис. 4 представлены значения $P^{(i)}(\theta | \eta_1^M)$.

В результате статистического эксперимента было установлено, что при $r = 2$ и числе реализаций 10^3 (по 10 подключений сигнала в моменты 1, 11, 21; 2, 12, 22, ...) вероятность ложной тревоги имеет значение $P_{л.т} = 0,038$, вероятность правильного обнаружения сигнала в первом цикле $P_{пр.обн}^{(1)} = 0,160$, во втором цикле $P_{пр.обн}^{(2)} = 0,261$, в третьем цикле $P_{пр.обн}^{(3)} = 0,196$, т. е. $P_{пр.обн} = P_{пр.обн}^{(1)} + P_{пр.обн}^{(2)} + P_{пр.обн}^{(3)} = 0,617$.

Изменение границы до значений $\Gamma_n = 0,8$ и $\Gamma_n = 1, 2$ привело к уменьшению вероятности правильного обнаружения соответственно до 0,602 и 0,598. Таким образом, МБП оказалось эффективным и для рассмотренного случая.

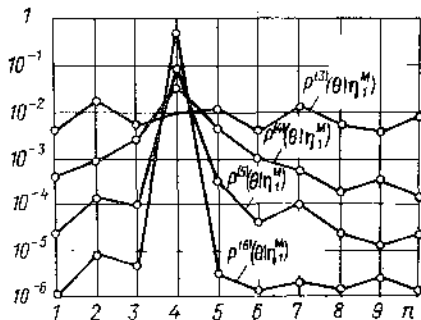


Рис. 4. Апостериорные распределения моментов появления сигнала.

2.3.2. Обнаружение, допускающее большие запаздывания

Первичный поиск. Сначала проверим, насколько эффективно применение МБП для определения процедуры обнаружения сигнала.

Рассмотрим случай, когда функция выигрыша имеет вид

$$W(v, \theta) = \begin{cases} 0, & v < \theta; \\ e^{-k(v - \theta)}, & v \geq \theta, \end{cases} \quad (2.12)$$

а момент воздействия сигнала распределен равномерно на $[1, N]$. Для обнаружения используется статистика

$$\begin{aligned} \sigma_n &= (1 - e^{-k}) \left(e^{-kn} \alpha_{n-1}^* + \frac{N-n}{N} \pi_n^{(0)} \right) + \\ &+ \left[\frac{1}{N} - (1 - e^{-k}) e^{-kn} \gamma_{n-1} \right] \pi_n; \\ \alpha_{n-1}^* &= \alpha_{n-2}^* + \frac{1}{N} e^{(n-1)k} \varphi_{n-1} \end{aligned}$$

и граница $\Gamma_n = 1/N$.

Результаты статистического эксперимента при $r=2$ и $N=10$ по 10^4 реализациям представлены на рис. 5. Сплошной линией на рисунке соединены значения среднего выигрыша, соответствующие расчетной границе, штриховыми — наибольшие значения, которые были получены в результате подбора границы (небольшого повышения).

Видно, что при допущении больших запаздываний (малых значений k) расчетная граница является оптимальной.

Теперь определим, насколько увеличится вероятность правильного определения момента появления сигнала, если обнаружение сочетать с последующим доопределением момента его появления. Важно также установить число шагов, которые приходится затрачивать для увеличения вероятности обнаружения.

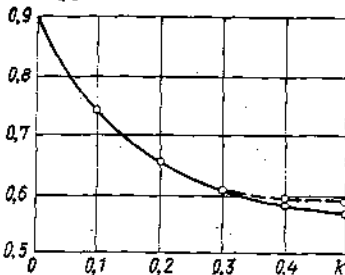


Рис. 5. Средний выигрыш от обнаружения сигнала.

Рассмотрим случай, когда функция выигрыша имеет вид

$$W(v, \theta) = \begin{cases} 0, & v < \theta; \\ 1 - k(v - \theta), & v \geq \theta, \end{cases}$$

являясь приближением (2.12) при малых значениях k , а момент воздействия сигнала распределен равномерно на $[1, N]$.

Для обнаружения используется статистика π_n и граница

$$\Gamma_n = \frac{1}{1 + k(N - n)}$$

Для определения момента появления сигнала после прекращения наблюдений в момент n_* вычисляются значения апостериорных вероятностей $P(\theta | \eta_1^{n_*})$ и принимается решение, что сигнал имеет место в момент θ , для которого $P(\theta | \eta_1^{n_*}) = \max$.

Значения $P(\theta | \eta_1^{n_*})$ вычисляются по формуле

$$P(\theta | \eta_1^{n_*}) = \begin{cases} \varphi_\theta \frac{1 - \pi_{n_*}}{N - n_*}, & n_* < N, \\ \varphi_\theta \left(\sum_{j=1}^N \varphi_j \right)^{-1}, & n_* = N, \end{cases} \quad (2.13)$$

вид которой для $n_* < N$ следует из формулы (2.5), а для $n_* = N$ — из условия

$$\sum_{j=1}^N P(j | \eta_1^{n_*}) = 1.$$

На рис. 6 представлена одна из реализаций π_n , достигающая границы в момент $n_* = 10$, а также вычисленные после остановки значения $P(\theta | \eta_1^{n_*})$. Максимальное значение $P(\theta | \eta_1^{n_*})$, как видно, соответствует моменту $n = 4$, который и принимается за момент воздействия сигнала.

В результате статистического эксперимента было установлено, что при $r = 2$, $N = 10$ и числе реализаций 10^4 (по 10^3 подключений сигнала в моменты 1, ..., N) характеристики обнаружения имеют значения, приведенные в табл. 1.

Таким образом, обнаружение, допускающее большие запаздывания с последующим доопределением момента появления сигнала, позволяет определять этот момент с тем большей вероятностью, чем больше допустимое время запаздывания.

Повторный поиск. В рассматриваемом случае важно выяснить, на какое увеличение вероятности правильного определения момента появления сигнала

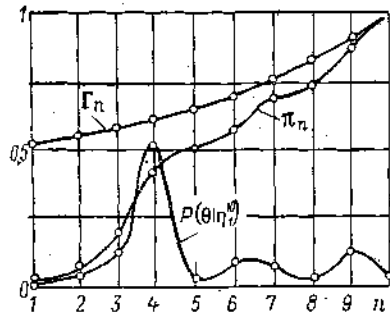


Рис. 6. Статистика и апостериорное распределение моментов появления сигнала.

Таблица 1. Эффективность обнаружения

k	$P_{\text{п.г}}$	$P_{\text{пр.обн}}$	$T_{\text{ср}}^{(1)}$ (шагов)
0	0	0,672	10
0,1	0,103	0,643	6,93
0,2	0,220	0,596	5,85
0,3	0,303	0,553	5,16

можно рассчитывать при повторном поиске и какое дополнительное время наблюдения на это тратится.

Процедура обнаружения сигнала при повторном поиске в принципе та же, что и при первичном. Как отмечалось в § 2.1, повторный поиск будет проходить в условиях нового априорного распределения $P^{(2)}(\theta)$, совпадающего с апостериорным распределением $P(\theta | \eta_1^{i*})$. Будучи вложенным в память машины для моментов $i = N - n_* + 1, N - n_* + 2, \dots, N$, представляющих собой номера моментов в обратном направлении, это новое априорное распределение $P^{(2)}(\theta)$ будет использоваться для повторного поиска.

Для повторного поиска используется статистика π_i , определяемая рекуррентным соотношением

$$\pi_{i+1} = A(n, n+1) / [A(n, n+1) + B(n, n+1)],$$

где

$$A(i, i+1) = \pi_i + (1 - \pi_i) P^{(2)}(i+1) \left[\sum_{j=i+1}^N P^{(2)}(j) \right]^{-1} \varphi_{i+1};$$

$$B(i, i+1) = (1 - \pi_i) \left\{ 1 - P^{(2)}(i+1) \left[\sum_{j=i+1}^N P^{(2)}(j) \right]^{-1} \right\},$$

при начальном значении π_{i_*} равном

$$\pi_{i_*} = \sum_{j=1}^{i_*} P^{(2)}(j),$$

и граница, определяемая формулой

$$\Gamma_i = \frac{\sum_{j=i+1}^{i_{\max}} [1 - k(i_{\max} - j)] P^{(2)}(j)}{\sum_{j=i+1}^{i_{\max}} [1 - k(i_{\max} - j)] P^{(2)}(j) + (i_{\max} - i) k \sum_{j=i+1}^N P^{(2)}(j)}$$

Задание границы в таком виде находится в согласии с МБП, рекомендуя решение об остановке принимать тогда, когда выигрыш от остановки в момент n сравняется с наибольшим выигрышем от продолжения наблюдений до одного из моментов $v > n$. В случае, когда распределение $P^{(2)}(\theta)$ неравномерно, а именно это имеет место при повторном поиске, таким моментом, как показало моделирование, является момент i_{\max} , соответствующий $\max P^{(2)}(\theta)$.

По достижении в момент i_{**} статистикой π_i границы Γ_i повторный поиск заканчивается и производится определение момента, в который сигнал появлялся. Для этого вычисляются значения апостериорных вероятностей $P(\theta | \eta_{i_{**}}^{i_{**}})$ и принимается решение, что сигнал имел место в момент θ , для которого $P(\theta | \eta_{i_{**}}^{i_{**}}) = \max$.

Апостериорные вероятности $P(\theta | \eta_{i_{**}}^{i_{**}})$ для $\theta = i_*, \dots, i_N$ вычисляются аналогично случаю первичного поиска:

$$P(\theta | \eta_{i_{**}}^{i_{**}}) = \begin{cases} P(i_*), & i_{**} = i_*; \\ \varphi_{\theta} P^{(2)}(\theta) (1 - \pi_{i_{**}}) \left[\sum_{j=i_{**}+1}^N P^{(2)}(j) \right]^{-1}, & i_{**} \in \{i_*+1, N-1\}; \\ \varphi_{\theta} P^{(2)}(\theta) \left[\sum_{j=1}^{i_*} P(j) + \sum_{j=i_*+1}^N \varphi_j P^{(2)}(j) \right]^{-1}, & i_{**} = N. \end{cases}$$

Здесь вид формулы для случая $i_{**} = N$ следует из условия $\sum_{j=1}^N P(j | \eta_{i_{**}}^{i_{**}}) = 1$.

На рис. 7 представлены одна из реализаций π_i , начавшаяся при повторном поиске с момента $n_* = 10$ ($i_* = 1$) и достигающая границы Γ_i в момент $i_{**} = 7$, а также вычисленные после остановки значения $P(\theta | \eta_{i_{**}}^{i_{**}})$. Максимальное значение $P(\theta | \eta_{i_{**}}^{i_{**}})$, как видно, соответствует моменту $i = 7$, который и принимается за момент появления сигнала. В результате статистического эксперимента при $r = 2$, $N = 10$, $k = 0,1$ было установлено, что характеристики обнаружения имеют следующие значения: $P_{\text{п.т}} = 0,152$; $P_{\text{пр.обн}} = 0,795$; среднее время, затрачиваемое на первичный поиск, $T_{\text{ср}}^{(1)} = 6,93$ шага, на повторный поиск $T_{\text{ср}}^{(2)} = 2,11$ шага.

Таким образом, при повторном поиске имеет место дальнейшее увеличение вероятности правильного определения момента появления сигнала: своевременное обнаружение было возможно с вероятностью $P_{\text{св.обн}} = 0,558$ при затрате $T_{\text{ср}}^{(0)} = 6,41$ шага, первичный поиск позволил получить $P_{\text{пр.обн}} = 0,643$ ($k = 0,1$) при затрате $T_{\text{ср}}^{(1)} = 6,93$ шага, повторный поиск увеличил $P_{\text{пр.обн}}$ до 0,795 с затратой $T_{\text{ср}} = 9,04$ шага.

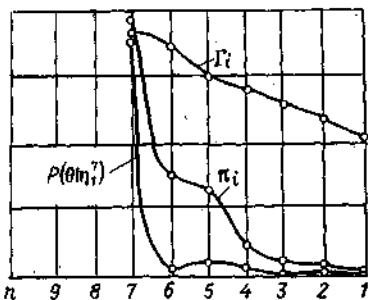


Рис. 7. Статистика и апостериорное распределение моментов появления сигнала при повторном поиске.

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА (непрерывное время)

Изложение этой и последующих глав хотя и относится к случаю непрерывных входных воздействий, тем не менее базируется на положениях, сформулированных в гл. 2, применительно к случаю дискретного времени. Новым является рассмотрение ситуации, когда к неопределенности момента воздействия сигнала добавляется неопределенность его продолжительности.

Непрерывное время не может изменить сути дела, так как основной фактор — существенно меньшая продолжительность сигнала по сравнению с временем наблюдения — здесь сохраняется в полной мере. Не меняются и рекомендации по использованию МБП, замечания относительно принимаемых приближений и многое другое, о чем говорилось в предыдущей главе. Частично эти положения будут повторены, однако акцент будет сделан на особенностях вычисления текущих значений статистик для непрерывного времени.

В этой связи можно сказать, что основной смысл рассмотрения случая непрерывного времени — это разработка аппарата, позволяющего вычислять текущие значения статистик и определяющего алгоритм построения устройств для обнаружения сигнала в реальной обстановке.

Начиная с этой главы, в последовательности, аналогичной той, которой придерживались в гл. 1, рассмотрим составление процедуры обнаружения сигнала; вывод стохастических дифференциальных уравнений статистик; определение эффективности найденных процедур.

3.1. Правило принятия решения о появлении сигнала постоянной продолжительности ($h = \text{const}$)

Воздействие сигнала будем задавать процессом

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < \theta; \\ 1, & t \in [\theta, \theta + h]; \\ 0, & t > \theta + h, \end{cases}$$

где момент θ (момент начала воздействия сигнала) случаен и задается функцией распределения $F(\theta)$. Две реализации такого процесса представлены

на рис. 8. Этот процесс не может быть описан с помощью переходных вероятностей и поэтому не относится к классу марковских процессов, что приводит к большим осложнениям в определении процедуры обнаружения сигнала.

Наблюдаемый процесс будем представлять суммой белого шума и сигнала, описываемого на интервале $[\theta, \theta + h]$ процессом θ_t . В качестве сигнала принимается постоянная величина r , низкочастотный или высокочастотный шум с рациональным спектром.

Мало что изменится, если вместо наблюдаемого процесса будем рассматривать интеграл от него — реализацию η_0^t . С информационной точки зрения, это одно и то же, но интересно другое — возможность представления η_t процессом диффузионного типа. Эта возможность позволяет в гл. 4 воспользоваться разработанным для процессов такого типа аппаратом стохастических дифференциальных уравнений и с их помощью вычислять статистики, необходимые для принятия решений.

Своевременный характер обнаружения может быть учтен следующей точной формулировкой задачи обнаружения.

В предположении, что сигнал появляется в случайный момент времени θ , присутствует в течение времени h и затем исчезает, необходимо из класса K решающих правил δ найти такое правило δ^* , для которого

$$P(\nu \leq \theta + h | \nu \geq \theta) = \sup_{\delta \in K} P(\nu \leq \theta + h | \nu \geq \theta).$$

Как и в случае дискретного времени, для получения максимального выигрыша (вероятности обнаружения) наблюдения должны продолжаться до тех пор (до момента ν^*), пока вычисляемый для реализации η_0^t выигрыш $g(\eta_0^t)$ не сравняется с наибольшим выигрышем $U_t^T(\eta_0^t)$, получаемым для той же реализации от остановки на $[t, T]$, т. е.

$$\nu^* = \min \left\{ t : g(\eta_0^t) = U_t^T(\eta_0^t) \right\}.$$

Аналогично случаю дискретного времени, когда $U_n^N(\eta_1^n)$ удовлетворяло рекуррентному соотношению (2.2), при непрерывном времени для $U_t^T(\eta_0^t)$ будет иметь место соотношение

$$U_t^T(\eta_0^t) = \max \left\{ g(\eta_0^t), M U_t^T(\eta_0^t) \right\},$$

где $M U_t^T(\eta_0^t)$ — условное математическое ожидание выигрыша от продолжения наблюдений.

В тех случаях, когда процесс, описывающий появление сигнала, является марковским, например в случае, когда сигнал после появления не исчезает, может быть реализовано байесовское правило, т. е. найдена марковская статистика и задана граница областей принятия решений. С этой целью

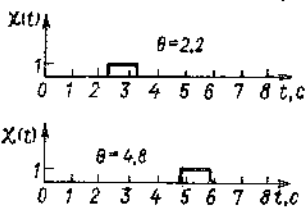


Рис. 8. Реализация процесса появления сигнала постоянной продолжительности.

составляются уравнения для выигрыша от продолжения наблюдений в координатах достаточной статистики.

Граница областей принятия решений находится путем решения этих уравнений в условиях равенства выигрыша от остановки выигрышу от продолжения наблюдений и их производных. Как показано в работе [26], этих условий достаточно для полного определения процедуры обнаружения.

В рассматриваемом случае χ_t не является марковским процессом, вследствие чего не удастся найти конечного числа достаточных статистик, необходимых для байесовского определения процедуры обнаружения. Приходится обращаться к МБП, позволяющему в известной мере обойти осложнения, связанные с немарковостью χ_t .

Модификация байесовского правила заключается в том, что это новое правило хотя и оперирует с выигрышем $MU_t^T(\eta_0^t)$, но рекомендует вычислять этот выигрыш без учета дополнительной информации, которая может быть получена при продолжении наблюдений. Такое допущение позволяет сравнительно просто вычислять выигрыш от продолжения наблюдений $MU_t^T(\eta_0^t)$.

Как и в случае дискретного времени, статистика и граница, разделяющая области принятия решений, могут быть получены путем приравнивания выигрыша $U_t^T(\eta_0^t)$ от прекращения наблюдений на $[t, T]$ выигрышу от остановки в момент $t - g(\eta_0^t)$.

Необходимые для дальнейшего рассмотрения выигрыши от остановки в моменты t и ν можно представить в виде соответствующих интегралов.

Выигрыш от остановки в момент t будет равен

$$g(\eta_0^t) = M[W(t, \theta) | \eta_0^t] = \int_0^t W(t, \theta) f(\theta | \eta_0^t) d\theta,$$

а выигрыш от остановки в момент ν может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} M[g(\eta_0^\nu) | \eta_0^t] &= M\left[\int_0^\nu W(\nu, \theta) f(\theta | \eta_0^\nu) d\theta | \eta_0^t\right] = \\ &= \int_0^\nu W(\nu, \theta) M[f(\theta | \eta_0^\nu) | \eta_0^t] d\theta = \int_0^\nu W(\nu, \theta) f(\theta | \eta_0^t) d\theta. \end{aligned}$$

Апостериорная плотность начала воздействия сигнала, входящая в эти выражения, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} f(\theta | \eta_0^t) &= \frac{dP(\eta_0^t, \theta)}{dP(\eta_0^t)} = \frac{dP(\eta_0^t | \theta) f(\theta)}{dP(\eta_0^t)} \frac{P(\theta > t | \eta_0^t)}{P(\theta > t | \eta_0^t)} = \\ &= \frac{dP(\eta_0^t | \theta)}{dP(\eta_0^t | \theta > t)} (1 - \pi_t) \frac{f(\theta)}{P(\theta > t)} = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \varphi_{\theta}^{\theta+h} \frac{1-\pi_t}{P(\theta > t)} f(\theta), & \theta < t-h; \\ \varphi_{\theta}^t \frac{1-\pi_t}{P(\theta > t)} f(\theta), & \theta \in [t-h, t]; \\ \frac{1-\pi_t}{P(\theta > t)} f(\theta), & \theta > t, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\frac{dP(\eta_0^t | \theta)}{dP(\eta_0^t | \theta > t)}$ — производная от меры процесса η_0^t , содержащего сигнал, по мере процесса, не содержащего сигнала (отношение правдоподобия).

Приступим к определению процедур, допускающих малые и большие запаздывания в обнаружении сигнала. Напомним, что под малым запаздыванием понимается не только имеющее один порядок с продолжительностью воздействия сигнала, но также более продолжительное (равное нескольким продолжительностям сигнала), если интервал, на котором появляется сигнал, значителен ($T=100h$ и более). Под большим запаздыванием понимаются запаздывания, соизмеримые с интервалом $[0, T]$, на котором появляется сигнал.

3.1.1. Обнаружение, допускающее малые запаздывания

Обнаружение одиночного сигнала. Начнем с частного случая, когда функция выигрыша не предполагает запаздываний в обнаружении:

$$W(v, \theta) = \begin{cases} 0, & v < \theta; \\ 1, & v \in [\theta, \theta+h]; \\ 0, & v > \theta+h. \end{cases}$$

В этом случае выигрыш от остановки в момент t будет равен

$$g(\eta_0^t) = \pi_t^{(0)},$$

где

$$\pi_t^{(0)} = P\left\{\theta \in [t, t+h] | \eta_0^t\right\},$$

а выигрыш от продолжения наблюдений будет равен суммарному выигрышу от остановок на $(t, T]$:

$$MU_t^T(\eta_0^t) = 1 - \pi_t,$$

где

$$\pi_t = P(\theta \leq t | \eta_0^t).$$

Приравнивая эти выигрыши, видим, что в качестве статистики должна выступать величина $\sigma_t = \pi_t^{(0)} + \pi_t$, а в качестве границы областей принятия решений $\Gamma_t = 1$.

Если допустить небольшие запаздывания в обнаружении с помощью функции выигрыша

$$W(\nu, \theta) = \begin{cases} 0, & \nu < \theta; \\ 1, & \nu \in [\theta, \theta + (m+1)h]; \\ 0, & \nu > \theta + (m+1)h, \end{cases}$$

то выигрыш от остановки в момент t будет равен

$$g(\eta_0^t) = \pi_t^{(m)} = \left[\int_{t-(m+1)h}^{t-h} f(\theta) d\theta + \int_{t-h}^t \varphi_\theta^t f(\theta) d\theta \right] \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)},$$

где

$$\pi_t^{(m)} = P\left\{ \theta \in [t - (m+1)h, t] \mid \eta_0^t \right\},$$

а выигрыш от продолжения наблюдений может быть представлен в виде

$$MU_t^F(\eta_0^t) = 1 - \pi_t.$$

Из равенства этих выигрышей следует, что в качестве статистики может выступать величина

$$\sigma_t = (\alpha_t^{(m)} + \beta_t) \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} + \pi_t,$$

где

$$\alpha_t^{(m)} = \int_{t-(m+1)h}^{t-h} \varphi_\theta^{\theta+h} f(\theta) d\theta,$$

$$\beta_t = \int_{t-h}^t \varphi_\theta^t f(\theta) d\theta,$$

а в качестве границы $\Gamma_t = 1$.

Обнаружение пачки сигналов. В гл. 2 был рассмотрен аналог этого случая для дискретного времени. Отмечалось, что для условий, когда пачка содержит сигналы, имеющие одинаковую задержку по отношению к началу

цикла, целесообразно весь интервал наблюдений $[0, T]$ разбить на подынтервалы $[0, M], [M, 2M], \dots$, и обнаружение вести по циклам. Целесообразно также, чтобы в каждом цикле был свой отсчет времени. В этом случае все входные воздействия оказываются заданными на одном и том же временном интервале $[0, M]$, что позволяет в случае пропуска сигнала на предыдущем цикле использовать результат наблюдения для создания более благоприятных условий при обнаружении сигнала на последующем цикле.

Отмечалось также, что формой учета проведенных наблюдений на предыдущем цикле должно служить вычисляемое по результатам наблюдений апостериорное распределение $P^{(i-1)}(\theta | \eta_0^{tM})$, которое для последующего цикла должно рассматриваться как новое априорное распределение $P^{(i)}(\theta)$. В конечном счете такое накопление информации о моменте воздействия сигнала позволит за несколько циклов (если сигнал слаб) обнаружить поступление пачки сигналов.

3.1.2. Обнаружение, допускающее большие запаздывания

При больших допустимых запаздываниях обнаружение имеет смысл сочетать с последующим доопределением момента появления сигнала. Такое сочетание позволяет увеличить вероятность правильного определения момента появления сигнала, поскольку за счет запаздываний возрастает общее время наблюдения. Добавляется „лишнее” время, т. е. время после окончания воздействия сигнала. Важно, чтобы дополнительное время расходовалось экономно. Но этому требованию как раз и удовлетворяет процедура обнаружения при которой минимизируются ошибки, связанные с ложной тревогой и запаздыванием.

Действительно (об этом уже была речь), если использовать линейную функцию выигрыша

$$W(v, \theta) = \begin{cases} 0, & v < \theta; \\ 1 - k(v - \theta), & v \geq \theta, \end{cases} \quad (3.2)$$

которая эквивалентна функции потерь

$$\bar{W}(v, \theta) = \begin{cases} 1, & v < \theta; \\ k(v - \theta), & v \geq \theta, \end{cases}$$

то будут минимизироваться вероятность ложной тревоги и среднее время запаздывания, составляющие средний риск

$$R^{\delta}(\pi_0) = P(v < \theta) + kM [(v - \theta) | v \geq \theta] P(v \geq \theta).$$

Как и в случае дискретного времени, выигрыш от продолжения наблюдений может быть определен равенством

$$MU_t^{\delta}(\eta_0^t) = \sup_v M[g(\eta_0^v) | \eta_0^t], \quad v = t + \Delta, \dots, T.$$

В условиях линейной функции выигрыша (3.2) в качестве статистики может использоваться апостериорная вероятность $\pi_t = P(\theta \leq t | \eta_0^t)$. В этом случае граница Γ_t определится как такое значение π_t , при котором функция

$$M V_t^T(\pi_t) = \sup_{\nu} \left\{ M [g(\eta_0^{\nu}) | \eta_0^t] - g(\eta_0^t) \right\}, \quad \nu = t + \Delta, \dots, T$$

принимает нулевое значение.

Покажем, что π_t действительно может выступать в качестве статистики. С этой целью определим выигрыши $g(\eta_0^t)$ и $M[g(\eta_0^{\nu}) | \eta_0^t]$.

Выигрыш от остановки в момент t будет равен

$$g(\eta_0^t) = \int_0^t [1 - k(t - \theta)] f(\theta | \eta_0^t) d\theta,$$

а выигрыш от остановки в момент $t + \Delta$ определится выражением

$$M [g(\eta_0^{t+\Delta}) | \eta_0^t] = \int_0^t [1 - k(t + \Delta - \theta)] f(\theta | \eta_0^t) d\theta + \\ + \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} \int_0^{t+\Delta} [1 - k(t + \Delta - \theta)] f(\theta) d\theta.$$

В случае, когда распределение момента появления сигнала $f(\theta)$ равномерно или имеет спадающий характер с ростом θ , этот выигрыш может использоваться для определения статистики и границы. Для этого определяется разность между выигрышем от продолжения наблюдений на один шаг и выигрышем от остановки в момент t :

$$M [g(\eta_0^{t+\Delta}) | \eta_0^t] - g(\eta_0^t) = -k\Delta \int_0^t f(\theta | \eta_0^t) d\theta + (1 - \pi_t) \frac{f(t)}{P(\theta > t)} \Delta = \\ = -k\pi_t \Delta + (1 - \pi_t) \frac{f(t)}{P(\theta > t)} \Delta,$$

из которой видно, что в качестве статистики должна использоваться величина π_t , а граница вычисляться по формуле

$$\Gamma_t = \frac{1}{1 + k(T - t)}.$$

Когда распределение момента появления сигнала возрастает с ростом θ или имеет локальные максимумы, выигрыш от продолжения наблюдений

$$M V_t^T(\eta_0^t) = \sup_{\nu} \left\{ M [g(\eta_0^{\nu}) | \eta_0^t] - g(\eta_0^t) \right\}, \quad \nu = t + \Delta, \dots, T$$

может наступать не при $\nu = t + \Delta$, а при больших значениях ν . Надо предварительно найти то ν , продолжение наблюдений до которого дает наибольший

выигрыш, затем приравнять выражение для этого выигрыша нулю и таким образом найти границу для момента t .

Определенный интерес может представлять процедура обнаружения, допускающая несколько меньшие запаздывания. Для этой цели снова может быть использована функция выигрыша

$$W(v, \theta) = \begin{cases} 0, & v < \theta; \\ e^{-k(v - \theta)}, & v \geq \theta \end{cases}$$

с соответствующим значением k .

Выражения для $g(\eta_0^t)$ и $M[g(\eta_0^{t+\Delta}) | \eta_0^t]$ будут иметь вид

$$g(\eta_0^t) = \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} \int_0^{t-h} e^{-k(t-\theta)} \varphi_\theta^\theta + h f(\theta) d\theta + \int_{t-h}^t e^{-k(t-\theta)} f(\theta | \eta_0^t) d\theta$$

и

$$\begin{aligned} M[g(\eta_0^{t+\Delta}) | \eta_0^t] &= \\ &= \left[\int_0^{t-h} e^{-k(t+\Delta-\theta)} \varphi_\theta^\theta + h f(\theta) d\theta + \int_t^{t+\Delta} e^{-k(t+\Delta-\theta)} f(\theta) d\theta \right] \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} + \\ &+ \int_{t-h}^t e^{-k(t+\Delta-\theta)} f(\theta | \eta_0^t) d\theta = \\ &= \left[\int_0^{t-h} (1 - k\Delta) e^{-k(t-\theta)} \varphi_\theta^\theta + h f(\theta) d\theta + f(t)\Delta \right] \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} + \\ &+ \int_{t-h}^t (1 - k\Delta) e^{-k(t-\theta)} f(\theta | \eta_0^t) d\theta. \end{aligned}$$

Для равномерного и спадающего распределений момента появления сигнала выражения для статистики и границы могут быть определены из равенства

$$g(\eta_0^t) = M[g(\eta_0^{t+\Delta}) | \eta_0^t].$$

Появляющийся на таком пути интеграл $\int_{t-h}^t e^{-k(t-\theta)} f(\theta | \eta_0^t) d\theta$ в силу малых значений k может быть приближенно представлен в виде $\pi_t^{(0)}$. В результате в качестве статистики может быть взята величина

$$\alpha_t = k[e^{-kt} \alpha_t^* + P(\theta > t) \pi_t^{(0)}] + [f(t) - ke^{-kt} \alpha_t^*] \pi_t,$$

где

$$\alpha_t^* = \int_0^{t-h} e^{k\theta} \varphi_\theta^\theta + h f(\theta) d\theta,$$

а в качестве границы $\Gamma_t = f(t)$.

Поскольку обнаружение, допускающее большие запаздывания, характеризуется известной неопределенностью относительно момента воздействия сигнала, то необходимо последующее уточнение этого момента.

Так же, как и в случае дискретного времени, получение более точной информации о моменте появления сигнала может быть сделано в результате нахождения этого момента как момента, для которого апостериорная вероятность наличия сигнала максимальна. Но можно поступить и иначе — не прекращать в момент остановки наблюдений, а продолжить их в обратном направлении, т. е. осуществить повторный поиск. Так же, как и в случае дискретного времени, результаты первичного поиска должны учитываться апостериорным распределением момента появления сигнала, являющимся для повторного поиска новым априорным распределением. Сама процедура обнаружения при повторном поиске остается прежней.

При повторном поиске затрачивается дополнительное время на наблюдение и поэтому естественно ожидать увеличения вероятности правильного определения момента появления сигнала.

3.2. Правило принятия решения о появлении сигнала случайной продолжительности ($\dot{h} = \text{var}$)

Воздействие сигнала задается процессом

$$\chi_t = \begin{cases} 0, & t < \theta; \\ 1, & t \in [\theta, \theta + h]; \\ 0, & t > \theta + h, \end{cases}$$

где момент начала воздействия θ и продолжительность воздействия сигнала h случайны. Две реализации такого процесса представлены на рис. 9.

Такой процесс можно задать с помощью вероятностей перехода от 0 к 1 и от 1 к 0 с последующим запретом перехода от 0 к 1. При таком задании просматривается определенная близость χ_t к марковскому процессу. Тем не менее его все же нельзя отнести к классу марковских процессов.

Наблюдаемый процесс, как и при $h = \text{const}$, представляется суммой белого шума и процесса θ_t , точнее, интегралом от нее. Будем также предполагать, что наблюдение и принятие решения производятся в моменты времени, кратные Δ .

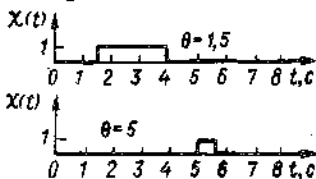


Рис. 9. Реализация процесса появления сигнала случайной продолжительности.

Прежде чем перейти к определению процедуры обнаружения сигнала со случайной продолжительностью, заметим, что рассматриваемый случай отличается от случая $h = \text{const}$ еще и тем, что он не имеет прототипа, с которым бы можно было его сравнить по эффективности.

В самом деле, если для обнаружения сигнала с постоянной продолжительностью

получил распространение метод обнаружения, заключающийся в сравнении отношения правдоподобия φ_{t-h}^t с постоянной границей, то в случае $h = \text{var}$ такое сопоставление неприемлемо, так как в этом случае φ_{t-h}^t не может быть определено ввиду случайности h . Что касается правила, которое могло быть использовано для определения процедуры обнаружения сигнала с $h = \text{var}$, то здесь дело обстоит аналогично случаю $h = \text{const}$. Процесс появления сигнала χ_t и в этом случае не может считаться марковским и поэтому приходится снова обращаться к МБП.

МБП, как отмечалось, отличается от байесовского правила тем, что оперирует с $MU_t^T(\eta_0^t)$, который, как и при $h = \text{const}$, вычисляется по-разному, в зависимости от того, какие запаздывания допускаются в обнаружении: малые или большие.

При малых допустимых запаздываниях $MU_t^T(\eta_0^t)$ приравнивается к апостериорной вероятности появления сигнала на $(t, T]$, а в случае, когда допускаются большие запаздывания, принимается равным наибольшему из выигрышей от остановки в одном из моментов на интервале $(t, T]$.

Как и раньше, решение о появлении сигнала должно приниматься тогда, когда выигрыш от продолжения наблюдений $MU_t^T(\eta_0^t)$ сравняется или окажется меньше выигрыша от остановки в наблюдаемый момент времени. Выражения для статистики и границы находятся из равенства этих выигрышей.

Выражения для $g(\eta_0^t)$ и $M[g(\eta_0^t) | \eta_0^t]$ могут быть представлены в виде интегралов. Выигрыш от остановки в момент t будет равен

$$g(\eta_0^t) = M[W(t, \theta) | \eta_0^t] = \int_0^t d\theta \int_0^\infty W(t, \theta) f(\theta, h | \eta_0^t) dh,$$

а ожидаемый выигрыш от остановки в момент ν может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} M[g(\eta_0^\nu) | \eta_0^t] &= M \left[\int_0^\nu d\theta \int_0^\infty W(\nu, \theta) f(\theta, h | \eta_0^\nu) dh \mid \eta_0^t \right] = \\ &= \int_0^\nu d\theta \int_0^\infty W(\nu, \theta) M[f(\theta, h | \eta_0^\nu) | \eta_0^t] dh = \int_0^\nu d\theta \int_0^\infty W(\nu, \theta) f(\theta, h | \eta_0^t) dh. \end{aligned}$$

Апостериорная плотность начала воздействия сигнала, входящая в эти выражения, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} f(\theta, h | \eta_0^t) &= \frac{dP(\eta_0^t | \theta, h)}{dP(\eta_0^t | \theta > t)} (1 - \pi_t) \frac{f(\theta, h)}{P(\theta > t)} = \\ &= \begin{cases} \varphi_\theta^{\theta+h} \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} f(\theta, h), & \theta < t - h; \\ \varphi_0^t \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} f(\theta, h), & \theta \in [t - h, t]; \\ \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} f(\theta, h), & \theta > t, \end{cases} \quad (3.3) \end{aligned}$$

где $\frac{dP(\eta_0^t | \theta, h)}{dP(\eta_0^t | \theta > t)}$ — производная от меры процесса η_0^t , содержащего сигнал со случайной продолжительностью h , по мере процесса, не содержащего сигнала.

Составление процедуры обнаружения здесь производится в полной аналогии со случаем $h = \text{const}$. Остановимся на частных случаях.

В случае, когда при обнаружении не допускаются запаздывания, т. е. функция выигрыша имеет вид

$$W(v, \theta) = \begin{cases} 0, & v < \theta; \\ 1, & v \in [\theta, \theta + h]; \\ 0, & v > \theta + h, \end{cases}$$

выигрыш от остановки в момент t будет равен

$$g(\eta_0^t) = \pi_t^{(0)},$$

а ожидаемый выигрыш от продолжения наблюдений может быть представлен в виде

$$MU_t^T(\eta_0^t) = 1 - \pi_t.$$

Из равенства этих выигрышей следует, что в качестве статистики может быть взята величина $\sigma_t = \pi_t^{(0)} + \pi_t$, а в качестве границы $\Gamma_t = 1$.

Имеет место полное совпадение со случаем $h = \text{const}$.

В случае, когда обнаружение допускает большие запаздывания, оно должно сочетаться с последующим доопределением момента появления сигнала.

Как и в случае $h = \text{const}$, для определения процедуры обнаружения целесообразно использовать линейную функцию выигрыша

$$W(v, \theta) = \begin{cases} 0, & v < \theta; \\ 1 - k(v - \theta), & v \geq \theta, \end{cases}$$

обеспечивающую экономное расходование времени на наблюдение.

Процедура обнаружения здесь аналогична случаю $h = \text{const}$. Действительно, выигрыш от остановки в момент t будет равен

$$g(\eta_0^t) = \int_0^t \int_0^\infty [1 - k(v - \theta)] f(\theta, h | \eta_0^t) dh,$$

а выигрыш от остановки в момент $t + \Delta$ определится выражением

$$M [g(\eta_0^t + \Delta) | \eta_0^t] = \int_0^t d\theta \int_0^\infty [1 - k(t + \Delta - \theta)] f(\theta, h | \eta_0^t) dh + \\ + \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} \int_t^{t + \Delta} d\theta \int_0^\infty [1 - k(t + \Delta - \theta)] f(\theta, h) dh.$$

Полагаем (необходима проверка), что, как и при $h = \text{const}$, этот выигрыш может использоваться для определения статистики и границы, если $f(\theta)$ имеет равномерный или спадающий характер.

Тогда разность этих выигрышей

$$M [g(\eta_0^t + \Delta) | \eta_0^t] - g(\eta_0^t) = -k\pi_t \Delta + (1 - \pi_t) \frac{f(\theta)}{P(\theta > t)} \Delta$$

показывает, что в качестве статистики может быть взята величина π_t , а в качестве границы $\Gamma_t = 1/[1 + k(T - t)]$.

Так же, как и при $h = \text{const}$, после обнаружения сигнала может быть уточнен момент его появления.

Для повышения вероятности правильного определения момента появления сигнала может быть применен повторный поиск. Следует только иметь в виду, что определенное в ходе первичного поиска апостериорное распределение относится здесь к двум параметрам (θ и h) и его хранение в ЦВМ для организации повторного поиска потребует большей памяти.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СТАТИСТИК

В случае непрерывного времени аналогами рекуррентных соотношений для статистик выступают стохастические дифференциальные уравнения. Здесь следует иметь в виду два обстоятельства.

Первое — это возможность сужения получаемой в результате наблюдений информации η_0^t до статистики $\sigma_t = \pi_t^{(m)} + \pi_t$, когда допускаются малые запаздывания в обнаружении сигнала, и до статистик $\sigma_t = f(\alpha_t^x, \pi_t)$ и π_t , когда допускаются большие запаздывания. Такая возможность была показана в предыдущей главе.

Второе — это возможность составления стохастических дифференциальных уравнений для компонент α_t , $\alpha_t^{(*)}$, $\alpha_t^{(m)}$ и β_t этих статистик. Такая возможность имеет место в случае, когда в качестве сигнала используется импульс величины r продолжительностью h . Составление дифференциальных уравнений возможно и в тех случаях, когда удастся для текущего момента времени получить оценку мгновенного значения случайного сигнала, например, когда возможна фильтрация по Калману—Бьюси.

Теория стохастических дифференциальных уравнений дана в работах [6, 10] и др. применительно к случайным процессам диффузионного типа. Последние являются недифференцируемыми процессами и с их помощью представлять реальные входные воздействия можно достаточно условно.

Несмотря на это, применение стохастических дифференциальных уравнений позволяет решить главное — описать динамику процесса обнаружения сигнала. Что же касается некоторого несоответствия диффузионных процессов реальным сглаженным процессам, то эта неадекватность при известных условиях не столь существенна для практики.

4.1. Отношение правдоподобия

Предстоящий вывод стохастических дифференциальных уравнений для статистик нуждается в предварительном определении отношения правдоподобия φ_0^t , что следует из интегральных выражений для этих статистик.

Применительно к различным процессам, описывающим сигнал, покажем, как могут быть вычислены φ_0^t .

Отношение правдоподобия для процессов определяется как производная меры $P_1(\eta_0^t)$, отвечающей случаю наличия сигнала и помехи, по мере $P_0(\eta_0^t)$, соответствующей случаю одной помехи.

Для ее определения в пространстве всех непрерывных функций $\omega(t)$, $t > 0$, $\omega(0) = 0$ построим цилиндрические множества

$$A(b_1, \dots, b_n) = \left\{ \omega: -\infty \leq \omega(t_1) < b_1, \right. \\ \left. -\infty \leq \omega(t_2) < b_2 \dots \right\},$$

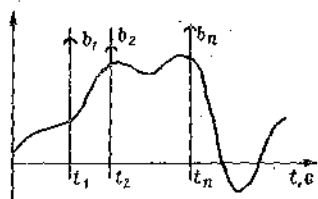


Рис. 10. Реализация случайного процесса.

представляющие собой множества непрерывных функций, проходящих в моменты t_1, \dots, t_n через „окна“ $(-\infty, b_1), \dots, (-\infty, b_n)$, причем $-\infty \leq b_1 \leq \infty$ (рис. 10).

Множества, образованные конечными суммами множеств типа A , образуют алгебру \mathcal{F} . Зададим меру (вероятность) на множествах из \mathcal{F} . Для этого допустим, что имеет место винеровский процесс, для которого

$$P(u_k | u_{k-1}, t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_k}} \exp \left[- (u_k - u_{k-1})^2 / (2t_k) \right].$$

Тогда мера на цилиндрическом множестве определяется равенством

$$P[A(b_1, \dots, b_n)] = \\ = \int_{-\infty}^{b_1} \dots \int_{-\infty}^{b_n} P(u_1 | 0, t_1) \dots P(u_n | u_{n-1}, t_n - t_{n-1}) du_1 \dots du_n.$$

Можно показать, что мера P конечно-аддитивна, непрерывна и, следовательно, продолжима на множестве, образованном бесконечными суммами множеств типа A . Это так называемая винеровская мера в пространстве непрерывных функций.

Если теперь допустить „приращение“ цилиндрического множества, то мера этого „приращения“ будет равна

$$\Delta P(A) = P[A(b_1 + \Delta b_1), \dots, b_n + \Delta b_n] - P[A(b_1, \dots, b_n)] = \\ = \int_{b_1}^{b_1 + \Delta b_1} \dots \int_{b_n}^{b_n + \Delta b_n} P(u_1 | 0, t_1) \dots P(u_n | u_{n-1}, t_n - t_{n-1}) du_1 \dots du_n = \\ = \frac{\exp \left[-b_1^2 / (2t_1) \right]}{\sqrt{2\pi t_1}} \dots \frac{\exp \left\{ -(b_n - b_{n-1})^2 / [2(t_n - t_{n-1})] \right\}}{\sqrt{2\pi(t_n - t_{n-1})}} \times \\ \times \Delta b_1 \Delta b_2 \dots \Delta b_n.$$

Допустим теперь две возможности: наблюдаемая реализация содержит сигнал и помеху, либо содержит одну помеху. Предположим, что сигналом

может быть постоянная величина r , детерминированная функция r_t или случайный процесс θ_t .

Сигнал — постоянная величина r . В этом случае

$$\eta_0^t = \begin{cases} \sqrt{C} w_t, & \text{одна помеха;} \\ \sqrt{C} w_t + r t, & \text{помеха и сигнал.} \end{cases}$$

Отношение „приращения” мер будет равно

$$\frac{\Delta P_1(A)}{\Delta P_0(A)} = \frac{\exp[-(\eta_t - r \Delta t_1)^2 / (2C \Delta t_1)]}{\exp[-\eta_t^2 / (2C \Delta t_1)]} \cdots \frac{\exp[-(\eta_{t_n} - \eta_{t_{n-1}} - r \Delta t_n)^2 / (2C \Delta t_n)]}{\exp[-(\eta_{t_n} - \eta_{t_{n-1}})^2 / (2C \Delta t_n)]}$$

Предположим теперь, что имеет место стягивание цилиндрического множества A в „точку” η_0^t . В этих условиях предел $\lim_{A \rightarrow \eta_0^t} \frac{\Delta P_1(A)}{\Delta P_0(A)}$ может рассматриваться как производная меры $P_1(\eta_0^t)$ по мере $P_0(\eta_0^t)$ и для рассматриваемого случая определится выражением

$$\frac{dP_1}{dP_0}(\eta_0^t) = \exp[r(\eta_t - \eta_0) / C - r^2 t / (2C)].$$

В рассматриваемом случае значение $\frac{dP_1}{dP_0}(\eta_0^t)$ не зависит от траектории процесса между моментами 0 и t и определяется только значениями реализации процесса в точках 0 и t .

Сигнал — детерминированная функция r_t . Мало что изменится, если постоянный во времени сигнал заменить переменным, но описываемым детерминированной функцией времени r_t , т. е. когда

$$\eta_0^t = \begin{cases} \sqrt{C} w_t, & \text{одна помеха;} \\ \sqrt{C} w_t + \int_0^t r_s ds, & \text{помеха и сигнал.} \end{cases}$$

В предположении, что функция r_t имеет ограниченную вариацию или, иначе говоря, выполняется условие

$$\int_0^t r_s^2 ds < \infty,$$

производная меры $P_1(\eta_0^t)$ по мере $P_0(\eta_0^t)$ будет равна

$$\frac{dP_1}{dP_0}(\eta_0^t) = \exp \left[\frac{1}{C} \int_0^t r_s d\eta_s - \frac{1}{2C} \int_0^t r_s^2 ds \right] \quad (4.1)$$

Сигнал — гауссовско-марковский процесс θ_t . Итак, для случая, когда конкретный вид реализации процесса, описывающего сигнал, известен, производная $\frac{dP_1}{dP_0}(\eta_0^t) = \varphi_0^t$ определяется выражением (4.1).

В случае, когда конкретный вид реализации сигнала неизвестен, а известно лишь что если сигнал воздействует, то он является одной из реализаций случайного процесса θ_t , выражение для $\frac{dP_1}{dP_0}(\eta_0^t)$ будет аналогично (4.1),

только вместо r_s под интегралами будет стоять условное математическое ожидание $M(\theta_t | \eta_0^t)$. Говоря иначе, в этом случае вместо неизвестного сигнала необходимо использовать его оценку. Доказательство может быть проведено по схеме, предложенной в работе [12], но с введением ряда упрощающих моментов, обусловленных частным характером рассматриваемого случая.

Предположим, что наблюдаемый процесс η_t принадлежит либо смеси сигнала и помех, либо одной помехе:

$$\eta_t = \begin{cases} \sqrt{C_2} w_t^{(n)}, & \text{одна помеха;} \\ \sqrt{C_2} w_t^{(n)} + \int_0^t \theta_s ds, & \text{помеха и сигнал.} \end{cases}$$

Обратимся к (4.1) и введем обозначение $\bar{\varphi}_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} = \frac{dP_1}{dP_0}(\eta_{k\Delta}^{(k+1)\Delta})$.

Теперь разложим $\bar{\varphi}_{k\Delta}^{(k+1)\Delta}$ в ряд и заменим $(\eta_{(k+1)\Delta} - \eta_{k\Delta})^2$ на его среднее значение $C_2\Delta$. В результате получим

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} &= \exp \left[\frac{1}{C_2} \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} r_s d\eta_s - \frac{1}{2C_2} \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} r_s^2 ds \right] = \\ &= \exp \left[\frac{1}{C_2} r_{k\Delta} (\eta_{(k+1)\Delta} - \eta_{k\Delta}) - \frac{1}{2C_2} r_{k\Delta}^2 \Delta + 0(\Delta) \right] = \\ &= 1 + \frac{1}{C_2} r_{k\Delta} (\eta_{(k+1)\Delta} - \eta_{k\Delta}) - \frac{1}{2C_2} r_{k\Delta}^2 \Delta + \\ &+ \frac{1}{2C_2^2} \left[r_{k\Delta} (\eta_{(k+1)\Delta} - \eta_{k\Delta}) - \frac{1}{2C_2} r_{k\Delta}^2 \Delta \right]^2 + 0(\Delta) = \\ &= 1 + \frac{1}{C_2} r_{k\Delta} (\eta_{(k+1)\Delta} - \eta_{k\Delta}) + 0(\Delta). \end{aligned}$$

Производная $\varphi_{k\Delta}^{(k+1)\Delta}$ для случая, когда сигнал — случайный процесс, рассматривается как результат усреднения $\bar{\varphi}_{k\Delta}^{(k+1)\Delta}$ по условной мере $P^{(k)}(\theta_0, \eta_0^{k\Delta})$, т. е.

$$\begin{aligned}\varphi_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} &= M^{(k)} \bar{\varphi}_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} = \\ &= 1 + \frac{1}{C_2} M^{(k)} [r_{k\Delta} (\eta_{(k+1)\Delta} - \eta_{k\Delta})] + 0(\Delta).\end{aligned}$$

Для реализации процесса на $[0, t]$ производная φ_0^t определяется формулой

$$\varphi_0^t = \prod_{k=0}^{n-1} \varphi_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} = \exp \left[\sum_{k=0}^{n-1} \ln \varphi_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} \right], \quad n = t/\Delta, \quad (4.2)$$

где $\ln \varphi_{k\Delta}^{(k+1)\Delta}$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}\ln \varphi_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} &= \ln \left\{ 1 + \frac{1}{C_2} M^{(k)} [r_{k\Delta} (\eta_{(k+1)\Delta} - \eta_{k\Delta})] \right\} = \\ &= -\frac{1}{C_2} M^{(k)} [r_{k\Delta} (\eta_{(k+1)\Delta} - \eta_{k\Delta})] - \frac{1}{2C_2^2} (M^{(k)} r_{k\Delta})^2 - (\eta_{(k+1)\Delta} - \eta_{k\Delta})^2 + \\ &+ 0(\Delta) = \frac{1}{C_2} M^{(k)} [r_{k\Delta} (\eta_{(k+1)\Delta} - \eta_{k\Delta})] - \frac{1}{2C_2} (M^{(k)} r_{k\Delta})^2 \Delta + 0(\Delta),\end{aligned}$$

где вместо $(\eta_{(k+1)\Delta} - \eta_{k\Delta})^2$ взято его среднее значение $C_2 \Delta$.

Суммирование $\ln \varphi_{k\Delta}^{(k+1)\Delta}$ в формуле (4.2) и последующий предельный переход позволяют получить выражение для φ_0^t в виде

$$\varphi_0^t = \exp \left[\frac{1}{C_2} \int_0^t m_s d\eta_s - \frac{1}{2C_2} \int_0^t m_s^2 ds \right],$$

где $m_s = M(\theta_s | \eta_0^s)$.

В тех случаях, когда сигнал имеет дробно-рациональный спектр, вычисление m_t для текущего момента времени может производиться в результате решения дифференциальных уравнений, определяющих фильтр Калмана-Бьюси.

Поскольку фильтрация по Калману-Бьюси осуществляется во временной области и не требует дополнительной затраты времени на переход в частотную область и обратно (если бы использовать интегральные уравнения фильтрации Винера-Хопфа), то можно не предъявлять жестких требований к обеспечению быстродействия и памяти ЦВМ.

Немаловажным преимуществом фильтра Калмана–Бьюси является и то, что уравнения фильтрации, по сути дела, непосредственно описывают способ реализации фильтра.

Чтобы воспользоваться уравнениями фильтрации Калмана–Бьюси, предположим, что имеет место многомерный процесс $(\tilde{\theta}_t, \tilde{\eta}_t)$ с векторами

$$\tilde{\theta}_t = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \vdots \\ \theta_k(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\eta}_t = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \vdots \\ \eta_2(t) \end{bmatrix},$$

удовлетворяющий системе уравнений

$$d\tilde{\theta}_t = a\tilde{\theta}_t dt + B d\tilde{w}_t^{(s)};$$

$$d\tilde{\eta}_t = A\tilde{\theta}_t dt + B d\tilde{w}_t^{(n)},$$

где a, b, A, B — матрицы соответственно $k \times k, k \times k, l \times k, l \times l$ порядков, а

$$\tilde{w}_t^{(s)} = \begin{bmatrix} w_1^{(s)}(t) \\ \vdots \\ w_k^{(s)}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{w}_t^{(n)} = \begin{bmatrix} w_1^{(n)}(t) \\ \vdots \\ w_l^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

— векторы, в которых $w_i^{(s)}(t)$ и $w_j^{(n)}(t)$ — независимые между собой стандартные винеровские процессы.

В этом случае выражение для отношения правдоподобия примет вид

$$\varphi_0^t = \exp \left[\int_0^t \langle A\tilde{m}_s, (BB^*)^{-1} d\tilde{\eta}_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \langle A\tilde{m}_s, (BB^*)^{-1} A\tilde{m}_s \rangle ds \right],$$

где $\langle x, y \rangle$ — скалярное произведение векторов x и y .

Для векторов условных математических ожиданий

$$\tilde{m}_t = \begin{bmatrix} m_1(t) \\ \vdots \\ m_k(t) \end{bmatrix}, \quad m_i(t) = M [\theta_i(t) | \eta_0^t]$$

имеют место уравнения Калмана–Бьюси

$$d\tilde{m}_t = a\tilde{m}_t dt + \Gamma_t A^* (BB^*)^{-1} (d\tilde{\eta}_t - A\tilde{m}_t dt);$$

$$\dot{\Gamma}_t = a\Gamma_t + \Gamma_t a^* - \Gamma_t A^* (BB^*)^{-1} A\Gamma_t + bb^*,$$

в которых

$$\gamma_{ij} = M \left\{ [\theta_i(t) - m_i(t)][\theta_j(t) - m_j(t)] \right\}$$

— среднеквадратические ошибки, характеризующие качество оптимальных в среднеквадратическом смысле оценок m_t процесса θ_t .

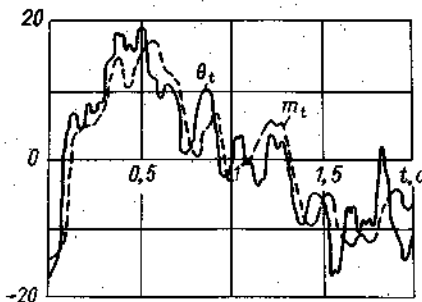


Рис. 11. Низкочастотный сигнал и его отфильтрованные значения.

В § 1.2 было показано, как составляются дифференциальные уравнения для сигналов с дробно-рациональным спектром. Были приведены примеры на составление уравнений. Продолжим рассмотрение этих примеров и покажем, как для таких сигналов могут быть составлены уравнения фильтрации.

Пример 4. Низкочастотный сигнал, энергетический спектр которого определяется выражением

$$G(\omega) = \frac{a^2 C_1}{2\pi a^2 + \omega^2}.$$

В этом случае процесс θ описывается дифференциальным уравнением

$$d\theta_t = -a\theta_t dt + a\sqrt{C_1} dw_t^{(s)}.$$

Относительно наблюдаемого процесса η_t будем считать, что он представляет собой сумму сигнала θ_t и белого шума, т. е. может быть представлен уравнением

$$d\eta_t = \theta_t dt + \sqrt{C_2} dw_t^{(n)}.$$

В этом случае уравнения Калмана – Бьюси примут вид

$$dm_t = -am_t dt + \frac{1}{C_2} \gamma_t (d\eta_t - m_t dt);$$

$$\dot{\gamma}_t = -2a\gamma_t - \frac{1}{C_2} \gamma_t^2 + a^2 C_1.$$

В частном случае, когда время наблюдения $[0, t]$ достаточно велико, $\dot{\gamma}_t$ не зависит от t , т. е. $\dot{\gamma}_t = 0$. Тогда стационарная ошибка $\gamma_t = \gamma$ определится формулой

$$\gamma = -aC_2 + a\sqrt{C_2^2 + C_1 C_2}.$$

Выражение для отношения правдоподобия имеет вид

$$\varphi_0^t = \exp \left[\frac{1}{C_2} \int_0^t m_s d\eta_s - \frac{1}{2C_2} \int_0^t m_s^2 ds \right].$$

Для случая, когда $a=2\pi$, $C_1=25$, $C_2=1$, на рис. 11 представлены реализации процессов θ_t и m_t .

Пример 5. Низкочастотный сигнал со спектром вида

$$G(\omega) = \frac{b_0^2 C_1}{2\pi [b_0^2 + (b_1^2 - 2b_0) \omega^2 + \omega^4]}, \quad b_0 - \frac{b_1^2}{4} < 0.$$

В этом случае процесс θ_t может быть представлен уравнениями

$$d\theta_t = \nu_t^{(1)} dt;$$

$$d\nu_t^{(1)} = - (b_1 \nu_t^{(1)} + b_0 \theta_t) dt + b_0 \sqrt{C_1} dw_t^{(s)}.$$

или в векторной форме

$$d\tilde{\theta}_t = a\tilde{\theta}_t dt + b d\tilde{w}_t^{(s)},$$

где

$$\tilde{\theta}_t = \begin{bmatrix} \theta_t \\ \nu_t^{(1)} \end{bmatrix}; \quad \tilde{w}_t^{(s)} = \begin{bmatrix} 0 \\ w_t^{(s)} \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_0 & -b_1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_0 \sqrt{C_1} \end{bmatrix}.$$

Наблюдаемое воздействие η_t имеет одномерный характер и описывается уравнением

$$d\eta_t = \theta_t dt + \sqrt{C_2} dw_t^{(n)}.$$

Уравнения Калмана - Бьюси для $\tilde{m}_t = \begin{bmatrix} m_\theta^{(f)} \\ m_t^{(1)} \end{bmatrix}$ примут вид

$$dm_\theta(t) = m_t^{(1)} dt + \frac{1}{C_2} \gamma_{11}(t) [d\eta_t - m_\theta(t) dt];$$

$$dm_t^{(1)} = -[b_1 m_t^{(1)} + b_0 m_\theta(t)] dt + \frac{1}{C_2} \gamma_{12}(t) [d\eta_t - m_\theta(t) dt],$$

а $\gamma_{11}(t)$ и $\gamma_{12}(t)$ находятся из системы уравнений

$$\dot{\gamma}_{11}(t) = 2\gamma_{12}(t) - \gamma_{11}^2(t)/C_2;$$

$$\dot{\gamma}_{12}(t) = -b_0 \gamma_{11}(t) - b_1 \gamma_{12}(t) + \gamma_{22}(t) - \frac{1}{C_2} \gamma_{11}(t) \gamma_{12}(t);$$

$$\dot{\gamma}_{22}(t) = -2[b_1 \gamma_{22}(t) + b_0 \gamma_{12}(t)] - \frac{\gamma_{12}^2(t)}{C_2} + b_0^2 C_1.$$

Выражение для отношения правдоподобия φ_0^t имеет тот же вид, что и в примере 4.

Пример 6. Высокочастотный узкополосный сигнал со спектром

$$G(\omega) = \frac{b_1^2 (b_0 - b_1^2/4) C_1}{2\pi [b_0^2 + (b_1^2 - 2b_0) \omega^2 + \omega^4]}, \quad b_0 - b_1^2/4 > 0$$

и максимумом спектральной плотности на частоте

$$\omega_0 = \sqrt{b_0 - b_1^2/2}.$$

По сравнению с предыдущим примером здесь изменится только вид матрицы b , которая будет равна

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_1 \sqrt{(b_0 - b_1^2/4) C_1} \end{bmatrix},$$

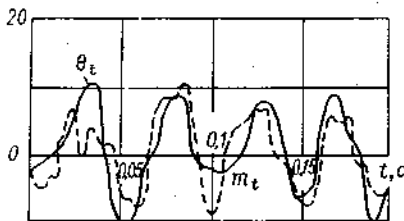


Рис. 12. Высокочастотный сигнал и его отфильтрованные значения.

а в уравнении Калмана – Бьюси – только уравнение для $\dot{\gamma}_{22}(t)$, которое примет вид

$$\dot{\gamma}_{22}(t) = -2[b_0 \gamma_{12}(t) + b_1 \gamma_{22}(t)] - \frac{1}{C_2} \gamma_{12}^2(t) + b_1^2 \left[b_0 - \frac{b_1^2}{4} \right] C_1.$$

Вид выражения для φ_0^t совпадает с соответствующим выражением из примера 4. Для случая, когда $b = 2518\pi^2$, $b_1 = 6\pi$, $C_1 = 25$, $C_2 = 1$, на рис. 12 представлены реализации процессов θ_t и m_t .

В рассмотренных примерах предполагалось, что входные воздействия поступают от одного приемного элемента. На практике приемных элементов может быть несколько. Для такого случая также возможно составление выражений для отношения правдоподобия, но чтобы не перегружать ими данный параграф, они вынесены в приложение I.

Под принятую схему вычисления φ_0^t , предполагающую использование отфильтрованных значений сигнала m_t , подходит случай, когда сигналом является так называемый телеграфный сигнал – однородный марковский процесс с двумя состояниями 0 и 1 и заданными вероятностями переходов. Этот случай (составление уравнений фильтрации и их симметризация) рассмотрен в приложении II.

В полной аналогии с рассмотренным случаем может быть получено выражение для φ_0^t , когда помехой является окрашенный шум.

Так, если в качестве помехи взять гауссовско-марковский процесс с

$$du_t = -\beta u_t dt + \beta \sqrt{C_2} dw_t^{(n)},$$

для которого

$$P(u_k | u_{k-1}, t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi C_2 \beta^2 (t_k - t_{k-1})}} \exp \left[-\frac{\{u_k - u_{k-1} [1 - \beta(t_k - t_{k-1})]\}^2}{2C_2 \beta^2 (t_k - t_{k-1})} \right],$$

то

$$\Delta P(A) = \frac{\exp[-b_1^2 / (2C_2 \beta^2 t_1)]}{\sqrt{2\pi C_2 \beta^2 t_1}} \dots \frac{\exp \left[-\frac{\{b_n - b_{n-1} [1 - \beta(t_n - t_{n-1})]\}^2}{2C_2 \beta^2 (t_n - t_{n-1})} \right]}{\sqrt{2\pi C_2 \beta^2 (t_n - t_{n-1})}} \times$$

$$\times \Delta b_1 \Delta b_2 \dots \Delta b_n.$$

Для случая, когда сигналом является постоянная во времени величина r , т. е.

$$\eta_t = \begin{cases} u_t, & \text{одна помеха;} \\ u_t + r, & \text{помеха и сигнал,} \end{cases}$$

отношению правдоподобия будет соответствовать выражение

$$\varphi_0^t = \exp \left[\frac{r}{\beta C_2} \int_0^t d\eta_s + \frac{r}{C_2} \int_0^t \left(\eta_s - \frac{r}{2} \right) ds \right].$$

Когда сигнал — детерминированная функция r_t , т. е.

$$\eta_t = \begin{cases} u_t, & \text{одна помеха;} \\ u_t + r_t, & \text{помеха и сигнал,} \end{cases}$$

выражение для отношения правдоподобия принимает вид

$$\varphi_0^t = \exp \left[\frac{1}{\beta C_2} \int_0^t r_s d\eta_s + \frac{1}{C_2} \int_0^t r_s \left(\eta_s - \frac{1}{2} r_s \right) ds \right].$$

Наконец, для случая, когда сигналом является случайный процесс θ_t , т. е.

$$\eta_t = \begin{cases} u_t, & \text{одна помеха;} \\ u_t + \theta_t, & \text{помеха и сигнал,} \end{cases}$$

выражение для отношения правдоподобия принимает вид

$$\varphi_0^t = \exp \left[\frac{1}{\beta C_2} \int_0^t m_s d\eta_s + \frac{1}{C_2} \int_0^t m_s \left(\eta_s - \frac{1}{2} m_s \right) ds \right], \quad (4.3)$$

где $m_s = M(\theta_s | \eta_0^s)$.

Если сигнал может быть представлен гауссовским процессом с дробно-рациональным спектром, также могут быть составлены уравнения для m_t . Правда, они не будут совпадать с уравнениями Калмана—Бьюси, использующимися в случае, когда помехой был белый шум.

Для фильтрации сигнала на фоне окрашенного шума должны быть составлены другие уравнения, являющиеся своего рода обобщением уравнений Калмана—Бьюси на этот случай. Приводить их не будем, поскольку использование (4.3) при составлении уравнения для β_t (см. § 4.2) осложняется возникающей неоднозначностью $M(\Delta \eta_t^2)$.

Действительно, когда помехой является белый шум, т. е.

$$d\eta_t = \begin{cases} \sqrt{C_2} dw_t^{(n)}, & \text{одна помеха;} \\ \sqrt{C_2} dw_t^{(n)} + \theta_t dt, & \text{помеха и сигнал,} \end{cases}$$

$\varphi_t^{t+\Delta}$ может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \varphi_t^{t+\Delta} &= \exp \left[\frac{1}{C_2} \left(m_t \Delta \eta_t - \frac{1}{2} m_t^2 \Delta \right) \right] + o(\Delta) = \\ &= 1 + \frac{1}{C_2} m_t \Delta \eta_t - \frac{1}{2C_2} m_t^2 \Delta + \frac{1}{2C_2} (m_t \Delta \eta_t)^2 + o(\Delta) = \\ &\doteq 1 + \frac{1}{C_2} m_t \Delta \eta_t. \end{aligned}$$

Здесь вместо $(\Delta \eta_t)^2$ взято его среднее значение $C_2 \Delta$, которое не зависит от того, содержит η_t сигнал или нет.

В случае же, когда помехой является окрашенный шум, т. е.

$$d\eta_t = \begin{cases} du_t, & \text{одна помеха;} \\ du_t + d\theta_t, & \text{помеха и сигнал,} \end{cases}$$

а

$$d\theta_t = -a\theta_t dt + \alpha \sqrt{C_1} dw_t^{(s)},$$

выражение для $\varphi_t^{f+\Delta}$ оказывается неоднозначным, поскольку

$$M(\Delta \eta_t^2) = \begin{cases} C_2 \Delta, & \text{одна помеха;} \\ C_2 \Delta + C_1 \Delta, & \text{помеха и сигнал.} \end{cases}$$

По этой причине не удастся использовать φ_t^f в виде (4.3) при составлении дифференциальных уравнений для β_t .

Во избежание неоднозначности в $M(\Delta \eta_t^2)$ имеет смысл произвести обеление окрашенной помехи, т. е. смесь сигнала и окрашенной помехи пропустить через фильтр, превращающий окрашенную помеху в белый шум. Чтобы окрашенная помеха с энергетическим спектром $G(\omega)$ стала белой, модуль передаточной функции обеляющего фильтра должен находиться из соотношения

$$|S(i\omega)|^2 = \frac{1}{G(\omega)}.$$

Покажем, как это делается, на примере, когда помехой является процесс u_t , получаемый путем прохождения белого шума через фильтр с передаточной функцией

$$S_0(i\omega) = \frac{\beta \sqrt{C_2}}{\beta + i\omega}.$$

Допустим, что сигнал представляется процессом, получаемым в результате прохождения другого белого шума через фильтр с передаточной функцией

$$S_1(i\omega) = \frac{b_0 \sqrt{C_1}}{b_0 + b_1 i\omega + (i\omega)^2}, \quad b_0 - b_1^2/4 \leq 0.$$

Чтобы окрашенная помеха стала белой, надо пропустить смесь помехи и сигнала через обесцвечивающий фильтр с передаточной функцией

$$S^*(i\omega) = \frac{i\omega + \beta}{b_0 + b_1 i\omega + (i\omega)^2} \frac{b_0 \sqrt{C_1}}{\beta \sqrt{C_2}}$$

В соответствии с § 1.2 окрашенная помеха может быть представлена уравнением

$$du_t = -\beta u_t dt + \beta \sqrt{C_2} dw_t^{(n)},$$

а сигнал определится уравнениями

$$dv_t^{(0)} = v_t^{(1)} dt;$$

$$dv_t^{(1)} = -(b_1 v_t^{(1)} + b_0 v_t^{(0)}) dt + b_0 \sqrt{C_1} dw_t^{(s)};$$

$$\theta_t = v_t^{(0)}.$$

После прохождения помех через обесцвечивающий фильтр получим

$$du_t = dw_t^{(n)},$$

а сигнал θ_t^* будет представляться уравнениями

$$dv_t^{(0)} = v_t^{(1)} dt;$$

$$dv_t^{(1)} = -(b_1 v_t^{(1)} + b_0 v_t^{(0)}) dt + b_0 \sqrt{C_1} dw_t^{(s)};$$

$$\theta_t^* = \frac{1}{\beta} v_t^{(1)} + v_t^{(0)}.$$

В результате после обесцвечивания помехи дифференциал преобразованного наблюдения будет иметь вид

$$d\eta_t^* = \begin{cases} \sqrt{C_2} dw_t^{(n)}, & \text{одна помеха;} \\ \sqrt{C_2} dw_t^{(n)} + \theta_t^* dt, & \text{помеха и сигнал.} \end{cases}$$

Понятно, что после обесцвечивания помехи неоднозначности в $M(\Delta \eta_t^*)^2$ не появится, поскольку $M(\Delta \eta_t^*)^2$ будет равно $C_2 \Delta$ независимо от того, содержит η_t сигнал и помеху или только одну помеху. Отношение правдоподобия для процесса η_t^* с обесцвеченным шумом будет иметь вид

$$\varphi_0^t = \exp \left(\frac{1}{C_2} \int_0^t m_s^* d\eta_s^* - \frac{1}{2C_2} \int_0^t m_s^* ds \right),$$

где $m_s^* = M(\theta_s^* | \eta_0^s)$ и может вычисляться в результате решения уравнений Калмана—Бьюси.

4.2. Уравнения статистик в случае сигнала постоянной продолжительности

Аналогично тому, как в гл. 1 были выведены рекуррентные соотношения для $\pi_n^{(0)}$, π_n и других статистик, так в случае непрерывного времени необходим вывод соотношений типа дифференциальных уравнений. Процесс обнаружения сигнала при этом сведется к решению дифференциальных уравнений статистик и сравнению результата решения с границей областей принятия решений.

В гл. 2 отмечалось, что обнаружение рассматривается для условий, когда помеха является белым шумом, а шумовой сигнал имеет дробно-рациональный спектр.

В действительности реальные помехи не описываются белым шумом, а шумовой сигнал не имеет дробно-рационального спектра. Тем не менее принятая идеализация входных воздействий необходима, поскольку только в этом случае появляется возможность составления стохастических дифференциальных уравнений.

Аппарат стохастических дифференциальных уравнений имеет свои особенности. Полученные с его помощью дифференциальные уравнения могут использоваться непосредственно для вычисления статистик от реальных входных воздействий. Для получения такой возможности необходимо применение численных методов.

Таким образом, довольно четко прослеживаются два этапа, необходимые для вычисления текущих значений статистик, — это составление стохастических дифференциальных уравнений статистик в условиях идеализированной модели входных воздействий (см. настоящий и следующий параграфы) и последующее их решение (см. § 5.1).

В отличие от случая дискретного времени, где для $\pi_n^{(0)}$ и π_n возможно составление рекуррентных соотношений, в случае непрерывного времени составление дифференциальных уравнений для $\pi_t^{(0)}$ и π_t осложняется. Это связано с тем, что используемая апостериорная плотность $f(\theta | \eta_0^t)$ вычисляется по-разному, в зависимости от интервала, к которому принадлежит начало воздействия сигнала θ . Чтобы учесть это обстоятельство, А. Н. Ширяев предложил ввести вспомогательные статистики α_t и β_t , первая из которых характеризует наличие сигнала в прошлом, а вторая — в наблюдаемый момент времени.

В качестве статистик α_t и β_t принимаются интегралы

$$\alpha_t = \int_0^{t-h} \varphi_\theta^\theta + h f(\theta) d\theta;$$

$$\beta_t = \int_{t-h}^t \varphi_\theta^t f(\theta) d\theta.$$

Тогда из соотношений

$$\pi_t^{(0)} = \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} \beta_t;$$

$$\pi_t = \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} (\alpha_t + \beta_t),$$

получаемых с помощью формулы (3.1), следует возможность представления $\pi_t^{(0)}$ и π_t в виде

$$\pi_t^{(0)} = \frac{\beta_t}{\alpha_t + \beta_t + P(\theta > t)}; \quad (4.4)$$

$$\pi_t = \frac{\alpha_t + \beta_t}{\alpha_t + \beta_t + P(\theta > t)}. \quad (4.5)$$

Отсюда следует, что текущие значения $\pi_t^{(0)}$ и π_t могут быть получены в результате решения дифференциальных уравнений для α_t и β_t и подстановки результата решения в формулы (4.4) и (4.5).

Перейдем к составлению стохастических дифференциальных уравнений для α_t , α_t^* , $\alpha_t^{(m)}$ и β_t . С этой целью сначала составляются рекуррентные соотношения с малым временным шагом $\Delta = t_{k+1} - t_k$, а затем в результате предельного перехода (при $\Delta \rightarrow 0$) получаются стохастические дифференциальные уравнения.

Особенностью такой процедуры является то, что учитываются получающиеся при разложении $\varphi_t^{t+\Delta}$ в ряд члены вида $(\Delta w_t)^2$, поскольку они имеют порядок Δ (в среднеквадратическом смысле).

Уравнения для α_t и α_t^* . Исходное выражение для α_t имеет вид

$$\alpha_t = \int_0^{t-h} \varphi_\theta^{\theta+h} f(\theta) d\theta.$$

Для моментов времени $t < h$ значения $\alpha_t = 0$.

Для момента $t + \Delta$ ($t \geq h$)

$$\alpha_{t+\Delta} = \int_0^{t-h} \varphi_\theta^{\theta+h} f(\theta) d\theta + \int_{t-h}^{t+\Delta-h} \varphi_\theta^{\theta+h} f(\theta) d\theta.$$

В силу малости промежутка интегрирования во втором интеграле имеем

$$\alpha_{t+\Delta} = \alpha_t + f(t-h) \varphi_{t-h}^t \Delta + O(\Delta).$$

Устремляя Δ к нулю, получим уравнение для α_t в виде

$$d\alpha_t = f(t-h) \varphi_{t-h}^t dt.$$

Аналогичным образом составляется уравнение для a_t^* , которое отличается от a_t множителем $e^{k\theta}$ в подынтегральном выражении

$$a_t^* = \int_0^{t-h} e^{k\theta} \varphi_\theta^{\theta+h} f(\theta) d\theta.$$

Дифференциальное уравнение для a_t^* будет иметь вид

$$da_t^* = \begin{cases} 0, & t < h; \\ f(t-h)e^{k(t-h)}\varphi_{t-h}^t dt, & t \geq h. \end{cases}$$

Уравнение для $a_t^{(m)}$. Исходное выражение для $a_t^{(m)}$ имеет вид

$$a_t^{(m)} = \int_{t-(m+1)h}^{t-h} \varphi_\theta^{\theta+h} f(\theta) d\theta.$$

Для моментов времени $t < h$ значения $a_t^{(m)}$ равны нулю.

Для моментов времени $t \in [h, (m+1)h]$ уравнение для $a_t^{(m)}$ совпадает с уравнением для a_t , т. е.

$$da_t^{(m)} = f(t-h)\varphi_{t-h}^t dt.$$

Для моментов времени $t > (m+1)h$ значения $a_{t+\Delta}^{(m)}$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} a_{t+\Delta}^{(m)} &= \int_{t+\Delta-(m+1)h}^{t+\Delta-h} \varphi_\theta^{\theta+\Delta} f(\theta) d\theta = \\ &= a_t^{(m)} - \int_{t-(m+1)h}^{t+\Delta-(m+1)h} \varphi_\theta^{\theta+h} f(\theta) d\theta + \int_{t-h}^{t+\Delta-h} \varphi_\theta^{\theta+h} f(\theta) d\theta = \\ &= a_t^{(m)} - \varphi_{t-(m+1)h}^{t-mh} f[t-(m+1)h] \Delta + \varphi_{t-h}^t f(t-h) \Delta + o(\Delta). \end{aligned}$$

Устремляя Δ к нулю, получим уравнение

$$da_t^{(m)} = \left\{ -f[1-(m+1)h] \varphi_{t-(m+1)h}^{t-mh} + f(t-h)\varphi_{t-h}^t \right\} dt.$$

Уравнение для β_t . Исходное выражение для β_t имеет вид

$$\beta_t = \int_{t-h}^t \varphi_\theta^t f(\theta) d\theta.$$

Для моментов времени $t < h$ значения $\beta_{t+\Delta}$ могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned}\beta_{t+\Delta} &= \int_0^{t+\Delta} \varphi_{\theta}^{t+\Delta} f(\theta) d\theta = \\ &= \int_0^t \varphi_{\theta}^{t+\Delta} f(\theta) d\theta + \int_t^{t+\Delta} \varphi_{\theta}^{t+\Delta} f(\theta) d\theta = \\ &= \varphi_t^{t+\Delta} [\beta_t + f(t)\Delta] + O(\Delta).\end{aligned}$$

Если теперь $\varphi_t^{t+\Delta} = \exp \left[\frac{1}{C_2} \left(m_t \Delta \eta_t - \frac{1}{2} m_t^2 \Delta \right) \right] + O(\Delta)$ разложить в ряд до членов второго порядка малости, а вместо $(\Delta \eta_t)^2$ взять его среднее значение $C_2 \Delta$, то

$$\varphi_t^{t+\Delta} = 1 + \frac{1}{C_2} m_t \Delta \eta_t + O(\Delta).$$

Теперь, пренебрегая членами $O(\Delta)$, получим

$$\beta_{t+\Delta} = \beta_t + f(t)\Delta + \frac{1}{C_2} m_t \beta_t \Delta \eta_t.$$

Устремляя Δ к нулю, приходим к дифференциальному уравнению

$$d\beta_t = f(t)dt + \frac{1}{C_2} m_t \beta_t d\eta_t.$$

Для моментов времени $t \geq h$ значения $\beta_{t+\Delta}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\beta_{t+\Delta} &= \int_{t+\Delta-h}^{t+\Delta} \varphi_{\theta}^{t+\Delta} f(\theta) d\theta = \\ &= \int_{t-h}^t \varphi_{\theta}^{t+\Delta} f(\theta) d\theta + \int_t^{t+\Delta} \varphi_{\theta}^{t+\Delta} f(\theta) d\theta - \int_{t-h}^{t+\Delta-h} \varphi_{\theta}^{t+\Delta} f(\theta) d\theta = \\ &= \varphi_t^{t+\Delta} [\beta_t + f(t)\Delta - f(t-h)\varphi_{t-h}^t \Delta] + O(\Delta).\end{aligned}$$

Далее, поступая аналогично случаю $t < h$, получим

$$d\beta_t = [f(t) - f(t-h)\varphi_{t-h}^t]dt + \frac{1}{C_2} m_t \beta_t d\eta_t.$$

Как видим, оценка сигнала m_t входит в уравнения для β_t в качестве сомножителя перед $d\eta_t$. Эта же оценка должна использоваться при вычислениях φ_{t-h}^t и $\varphi_{t-(m+1)h}^t$.

Предполагается, что значения m_t находятся в результате решения уравнений Калмана—Бьюси, для чего, вообще говоря, должны быть известны начальные значения m_0 и γ_0 . Определению последних мешает неизвестность начала воздействия сигнала. Если, однако, предположить, что интервал корреляции процесса θ_t существенно меньше времени его воздействия, то при вычислении γ_t можно считать, что фильтрация происходит в стационарном режиме. Это означает, что начальные значения практически утрачивают свое влияние на вычисляемые значения m_t и поэтому допустим известный произвол в их задании. Можно, например, m_0 принимать равным нулю, а необходимые для вычисления φ_{t-h}^t значения m_s , $s \in [t-h, t]$ принимать такими, какими они окажутся в результате решения уравнения, начиная с начала наблюдения.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих вид уравнений в конкретной обстановке.

Пример 7. Импульсный сигнал величины r и

$$f(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \notin [0, T]; \\ \frac{1}{T}, & \theta \in [0, T]. \end{cases}$$

В этом случае уравнения для статистик имеют вид

$$\begin{aligned} da_t &= \begin{cases} 0, & t < h; \\ \frac{1}{T} \varphi_{t-h}^t dt, & t \geq h; \end{cases} \\ da_t^* &= \begin{cases} 0, & t < h; \\ \frac{1}{T} e^{k(t-h)} \varphi_{t-h}^t dt, & t \geq h; \end{cases} \\ da(m) &= \begin{cases} 0, & t < h; \\ \frac{1}{T} \varphi_{t-h}^t dt, & t \in [h, (m+1)h]; \\ \frac{1}{T} \{ -\varphi_{t-(m+1)h}^{t-mh} + \varphi_{t-h}^t \} dt, & t > (m+1)h; \end{cases} \\ d\beta_t &= \begin{cases} \frac{1}{T} dt + \frac{1}{C_2} r \beta_t d\eta_t, & t < h; \\ \frac{1}{T} (1 - \varphi_{t-h}^t) dt + \frac{1}{C_2} r \beta_t d\eta_t, & t \geq h. \end{cases} \end{aligned}$$

Пример 8. Импульсный сигнал величины r и

$$f(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < 0; \\ \lambda e^{-\lambda\theta}, & \theta \geq 0. \end{cases}$$

Стохастические дифференциальные уравнения для статистик примут вид

$$\begin{aligned}
 da_t &= \begin{cases} 0, & t < h; \\ \lambda e^{-\lambda(t-h)} \varphi_{t-h}^t dt, & t \geq h; \end{cases} \\
 da_t^* &= \begin{cases} 0, & t < h; \\ \lambda e^{(k-\lambda)(t-h)} \varphi_{t-h}^t dt, & t \geq h; \end{cases} \\
 da_t^{(m)} &= \begin{cases} 0, & t < h; \\ \lambda e^{-\lambda(t-h)} \varphi_{t-h}^t dt, & t \notin [h, (m+1)h]; \\ \lambda \left\{ -e^{-\lambda[t-(m+1)h]} \varphi_{t-(m+1)h}^{t-mh} + e^{-\lambda(t-h)} \varphi_{t-h}^t \right\} dt, & t > (m+1)h; \end{cases} \\
 d\beta_t &= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} dt + \frac{1}{C_2} r \beta_t d\eta_t, & t < h; \\ \lambda \left[e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t-h)} \varphi_{t-h}^t \right] dt + \frac{1}{C_2} r \beta_t d\eta_t, & t \geq h. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Пример 9. Импульсный сигнал с низкочастотным шумовым заполнением, описываемым уравнениями

$$d\theta_t = -a\theta_t dt + a \sqrt{C_1} dw_t^{(s)}$$

и

$$f(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \notin [0, T]; \\ 1/T, & \theta \in [0, T]. \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения для a_t , a_t^* и $a_t^{(m)}$ совпадают с уравнениями из примера 7 за исключением, естественно, способа вычисления φ_{t-h}^t и φ_{t-h}^{t-mh} .

Здесь отношения правдоподобия вычисляются согласно формулам

$$\varphi_{t-h}^t = \exp \left(\frac{1}{C_2} \int_{t-h}^t m_s d\eta_s - \frac{1}{2C_2} \int_{t-h}^t m_s^2 ds \right)$$

и

$$\varphi_{t-(m+1)h}^{t-mh} = \exp \left(\frac{1}{C_2} \int_{t-(m+1)h}^{t-mh} m_s d\eta_s - \frac{1}{2C_2} \int_{t-(m+1)h}^{t-mh} m_s^2 ds \right),$$

где для m_s используются уравнения фильтрации (см. § 4.1)

$$dm_t = -am_t dt + \frac{1}{C_2} \gamma_t (d\eta_t - m_t dt);$$

$$\dot{\gamma}_t = -2a\gamma_t - \frac{1}{C_2} \gamma_t^2 + a^2 C_1.$$

Дифференциальные уравнения для β_t отличаются от уравнений примера 7 тем, что вместо r здесь должно стоять m_t .

Итак, путем решения дифференциальных уравнений для α_t и β_t и подстановки результатов решения в формулы (4.4) и (4.5) можно определить текущие значения апостериорных вероятностей $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(+)}$. Таким двухэтапным путем моделировались значения $\pi_t = \pi_t^{(-)t} + \pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(0)}$ при проведении статистических испытаний (см. гл. 5).

Но возможен и одноэтапный путь вычисления $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(+)}$. Можно, используя уравнения для α_t и β_t и зависимость $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$, $\pi_t^{(+)}$ от α_t и β_t составить уравнения непосредственно для $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(+)}$. Для этого следует воспользоваться формулой замены переменных (формула Ито). Последняя утверждает, что если x_t — n -мерный вектор, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$d\tilde{x}_t = a(\tilde{x}_t, t) + b(\tilde{x}_t, t)d\tilde{w}_t,$$

а функция $y(\tilde{x}, t)$ непрерывно дифференцируема по t и дважды непрерывно дифференцируема по x_i , то y удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} a_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} b_{ik} b_{jk} \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} b_i dw_i. \quad (4.6)$$

Таблица 2. Формулы для производных

π_t	$\pi_t = \pi_t^{(-)}$	$\pi_t = \pi_t^{(0)}$	$\pi_t = \pi_t^{(+)}$
$\frac{\partial \pi_t}{\partial t}$	$\frac{\alpha_t P^1(\theta > t)}{[\cdot]^2}$	$\frac{\beta_t P^1(\theta > t)}{[\cdot]^2}$	$\frac{(\alpha_t + \beta_t) P^1(\theta > t)}{[\cdot]^2}$
$\frac{\partial \pi_t}{\partial \alpha}$	$\frac{\beta_t + P(\theta > t)}{[\cdot]^2}$	$\frac{\beta_t}{[\cdot]^2}$	$\frac{P(\theta > t)}{[\cdot]^2}$
$\frac{\partial \pi_t}{\partial \beta}$	$\frac{\alpha_t}{[\cdot]^2}$	$\frac{\alpha_t + P(\theta > t)}{[\cdot]^2}$	$\frac{P(\theta > t)}{[\cdot]^2}$
$\frac{\partial^2 \pi_t}{\partial \alpha^2}$	$\frac{2[\beta_t + P(\theta > t)]}{[\cdot]^3}$	$\frac{2\beta_t}{[\cdot]^3}$	$\frac{2P(\theta > t)}{[\cdot]^3}$
$\frac{\partial^2 \pi_t}{\partial \beta^2}$	$\frac{2\alpha_t}{[\cdot]^3}$	$\frac{2[\alpha_t + P(\theta > t)]}{[\cdot]^3}$	$\frac{2P(\theta > t)}{[\cdot]^3}$
$\frac{\partial^2 \pi_t}{\partial \alpha \partial \beta}$	$\frac{\alpha_t - \beta_t - P(\theta > t)}{[\cdot]^3}$	$\frac{\alpha_t - \beta_t + P(\theta > t)}{[\cdot]^3}$	$\frac{2P(\theta > t)}{[\cdot]^3}$

Примечание. Выражение $[\cdot]$ означает $\alpha_t + \beta_t + P(\theta > t)$.

В рассматриваемом случае в качестве x_t могут быть приняты статистики a_t и β_t , а в качестве y_t — любая пара из $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$, $\pi_t^{(+)}$.

Покажем, как эта процедура может быть выполнена в случае, когда уравнения для a_t и β_t имеют вид

$$da_t = \begin{cases} 0, & t < h; \\ f(t) \varphi_{t-h}^t dt, & t \geq h; \end{cases}$$

$$d\beta_t = \begin{cases} f(t) dt + r\beta_t d\eta_t, & t < h; \\ f(t) (1 - \varphi_{t-h}^t) dt + r\beta_t d\eta_t, & t \geq h, \end{cases}$$

и требуется составить уравнения для вероятностей $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(+)}$, связанных с a_t и β_t соотношениями

$$\pi_t^{(-)} = \frac{a_t}{a_t + \beta_t + P(\theta > t)};$$

$$\pi_t^{(0)} = \frac{\beta_t}{a_t + \beta_t + P(\theta > t)};$$

$$\pi_t^{(+)} = \frac{P(\theta > t)}{a_t + \beta_t + P(\theta > t)}.$$

Чтобы воспользоваться формулой замены переменных, необходимо иметь выражения для производных, входящих в выражение (4.6). Поскольку эти производные еще понадобятся для случая $h = \text{var}$, приведем их в табл. 2.

Подставляя соответствующие производные в формулу Ито, получим уравнение для $\pi_t^{(-)}$:

$$d\pi_t^{(-)} = \begin{cases} 0, & t < h; \\ \frac{1}{[a_t + \beta_t + P(\theta > t)]^2} \left\{ -\alpha_t P^1(\theta > t) + \right. \\ \left. + [\beta_t + P(\theta > t)] f(t) \varphi_{t-h}^t - \alpha_t f(t) (1 - \varphi_{t-h}^t) - \alpha_t r^2 \beta_t + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_t}{a_t + \beta_t + P(\theta > t)} r^2 \beta_t^2 \right\} dt - \\ \left. - \frac{\alpha_t}{[a_t + \beta_t + P(\theta > t)]^2} r \beta_t dw_t, \right. & t \geq h; \end{cases}$$

которое после представления a_t и β_t через $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$, $\pi_t^{(+)}$; $P^1(\theta > t)$ — через $-f(t)$ и замены $\pi_t^{(-)}$ на $1 - \pi_t^{(0)} - \pi_t^{(+)}$ может быть приведено к виду

$$d\pi_t^{(-)} = \begin{cases} 0, & t < h; \\ \left[\frac{f(t)}{P(\theta > t)} (1 - \pi_t^{(0)} - \pi_t^{(+)}) \pi_t^{(+)} + \frac{f(t)}{P(\theta > t)} (\varphi_{t-h}^t - 1 + \pi_t^{(0)} + \right. \\ \left. + \pi_t^{(+)}) \pi_t^{(+)} + r^2 (1 - \pi_t^{(0)} - \pi_t^{(+)}) (\pi_t^{(0)})^2 \right] dt - \\ \left. - r (1 - \pi_t^{(0)} - \pi_t^{(+)}) \pi_t^{(0)} d\eta_t, \right. & t \geq h. \end{cases}$$

Аналогичным образом получаются уравнения для $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(+)}$:

$$d\pi_t^{(0)} = \begin{cases} \left[\frac{f(t)}{P(\theta > t)} (\pi_t^{(+)})^2 (1 - \varphi_{t-h}^t) - r^2 (\pi_t^{(0)})^2 \pi_t^{(+)} \right] dt + \\ + r \pi_t^{(0)} \pi_t^{(+)} d\eta_t, & t < h; \\ \left[\frac{f(t)}{P(\theta > t)} \pi_t^{(0)} \pi_t^{(+)} + \right. \\ \left. + \frac{f(t)}{P(\theta > t)} (1 - \pi_t^{(0)} - \varphi_{t-h}^t) \pi_t^{(+)} - r^2 (\pi_t^{(0)})^2 (1 - \pi_t^{(0)}) \right] dt + \\ + r (1 - \pi_t^{(0)}) \pi_t^{(0)} d\eta_t, & t \geq h; \end{cases}$$

$$d\pi_t^{(+)} = \begin{cases} \left[- \frac{f(t)}{P(\theta > t)} (\pi_t^{(+)})^2 (1 - \varphi_{t-h}^t) + r^2 (\pi_t^{(0)})^2 \pi_t^{(+)} \right] dt - \\ - r \pi_t^{(0)} \pi_t^{(+)} d\eta_t, & t < h; \\ \left[- \frac{f(t)}{P(\theta > t)} (1 - \pi_t^{(+)}) \pi_t^{(+)} - \right. \\ \left. - \frac{f(t)}{P(\theta > t)} (\pi_t^{(+)})^2 + r^2 (\pi_t^{(0)})^2 \pi_t^{(+)} \right] dt - \\ - r \pi_t^{(0)} \pi_t^{(+)} d\eta_t, & t \geq h. \end{cases}$$

Выбранная форма представления уравнений для $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(+)}$ удобна в том отношении, что позволяет легко проверить их достоверность: сумма дифференциалов должна быть равна нулю.

4.3. Уравнения статистик в случае сигнала случайной продолжительности

Нахождение дифференциальных уравнений в случае $h = \text{var}$, проводится по той же схеме, что и для случая $h = \text{const}$. Для вычисления $\pi_t^{(0)}$ и π_t также требуется введение вспомогательных статистик α_t и β_t , которые в этом случае получаются в результате интегрирования в двух измерениях.

В качестве статистик α_t и β_t принимаются интегралы

$$\alpha_t = \int_0^t d\theta \int_0^{t-\theta} \varphi_\theta^{\theta+h} f(\theta, h) dh,$$

$$\beta_t = \int_0^t d\theta \int_{t-\theta}^{\infty} \varphi_\theta^t f(\theta, h) dh,$$

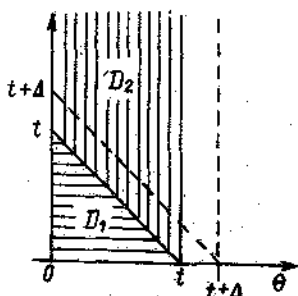


Рис. 13. Области интегрирования.

в которых интегрирования производятся по областям D_1 и D_2 соответственно (рис. 13).

В полной аналогии со случаем $h = \text{const}$, выражения для $\pi_t^{(0)}$ и π_t могут быть представлены в виде (4.4) и (4.5). Текущие значения $\pi_t^{(0)}$ и π_t определяются в результате решения дифференциальных уравнений для α_t и β_t и подстановки этих решений в (4.4) и (4.5).

Так же, как и в случае $h = \text{const}$, дифференциальные уравнения для α_t , α_t^* и β_t могут быть получены из определяющих их интегральных выражений. Процедура получения дифференциальных уравнений та же — составляются рекуррентные соотношения с шагом Δ и делается предельный переход при $\Delta = \max(t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$.

Рассмотрим составление дифференциальных уравнений для α_t и β_t .

Уравнения для α_t . Исходным выражением является следующее:

$$\alpha_t = \int_0^t d\theta \int_0^{t-\theta} \varphi_\theta^{\theta+h} f(\theta, h) dh.$$

Для момента времени $t + \Delta$ значение статистики может быть представлено в виде

$$\alpha_{t+\Delta} = \int_0^t d\theta \int_0^{t-\theta} \varphi_\theta^{\theta+h} f(\theta, h) dh + \int_0^{\Delta} d\theta \int_{t-\theta}^{t+\Delta-\theta} \varphi_\theta^{\theta+h} f(\theta, h) dh + O(\Delta) =$$

$$= \alpha_t + \Delta \int_0^{\Delta} \varphi_\theta^t f(\theta, t-\theta) d\theta + O(\Delta) =$$

$$= \alpha_t + \Omega_t \Delta + O(\Delta),$$

где

$$\Omega_t = \int_0^{\Delta} \varphi_\theta^t f(\theta, t-\theta) d\theta.$$

Устремляя Δ к нулю, получим уравнение для a_t в виде $da_t = \Omega_t dt$.

В случае, когда распределение для h имеет вид

$$f_2(h) = \begin{cases} 0, & h < 0; \\ \delta e^{-\delta h}, & h \geq 0, \end{cases}$$

справедливо, как будет показано, равенство $\Omega_t = \delta \beta_t$. Тогда уравнение для a_t будет $da_t = \delta \beta_t dt$.

Уравнение для β_t . Исходное выражение для β_t имеет вид

$$\beta_t = \int_0^t d\theta \int_{t-\theta}^{\infty} \varphi_{\theta}^t f(\theta, h) dh.$$

Для момента времени $t + \Delta$ значение статистики может быть представлено выражением

$$\begin{aligned} \beta_{t+\Delta} &= \varphi_t^{t+\Delta} \left[\int_0^t d\theta \int_{t-\theta}^{\infty} \varphi_{\theta}^t f(\theta, h) dh + \right. \\ &+ \left. \int_0^{t+\Delta} d\theta \int_{t-\theta}^{\infty} \varphi_{\theta}^t f(\theta, h) dh - \int_0^t d\theta \int_{t-\theta}^{t+\Delta-\theta} \varphi_{\theta}^t f(\theta, h) dh \right] + 0(\Delta) = \\ &= \varphi_t^{t+\Delta} [\beta_t + f_1(t)\Delta - \Delta \int_0^t \varphi_{\theta}^t f(\theta, t-\theta) d\theta] + 0(\Delta). \end{aligned}$$

Представим теперь $\varphi_t^{t+\Delta}$ в виде

$$\varphi_t^{t+\Delta} = 1 + \frac{1}{C_2} m_t \Delta \eta_t + 0(\Delta)$$

и устремим Δ к нулю. В результате получим стохастическое дифференциальное уравнение для β_t :

$$d\beta_t = [f_1(t) - \Omega_t] dt + \frac{1}{C_2} m_t \beta_t d\eta_t, \quad (4.8)$$

где

$$\Omega_t = \int_0^t \varphi_{\theta}^t f(\theta, t-\theta) d\theta.$$

Но можно составить дифференциальное уравнение для β_t , которое не будет содержать Ω_t . С этой целью представим $\beta_{t+\Delta}$ несколько иначе:

$$\beta_{t+\Delta} = \varphi_t^{t+\Delta} \left[\int_0^t d\theta \int_{t+\Delta-\theta}^{\infty} \varphi_{\theta}^t f(\theta, h) dh + \int_t^{t+\Delta} d\theta \int_{t+\Delta-\theta}^{\infty} \varphi_{\theta}^t f(\theta, h) dh \right] + 0(\Delta).$$

Теперь допустим, что θ и h независимы, тогда

$$\beta_{t+\Delta} = \varphi_t^{t+\Delta} \left\{ \int_0^t \varphi_\theta^t f_1(\theta) d\theta \times \right. \\ \times \left[\frac{\int_{t-\theta}^\infty f_2(h) dh}{\int_{t-\theta}^\infty f_2(h) dh} \frac{\int_{t+\Delta-\theta}^\infty f_2(h) dh}{\int_{t-\theta}^\infty f_2(h) dh} \right] + \\ \left. + f_1(t) P(h > 0) \Delta \right\} + 0(\Delta).$$

Чтобы значение дроби в квадратной скобке не зависело от θ и тем самым упростилось интегрирование, допустим, что $f_2(h)$ имеет вид

$$f_2(h) = \begin{cases} 0, & h < 0; \\ \delta e^{-\delta h}, & h \geq 0, \end{cases}$$

тогда

$$\beta_{t+\Delta} = \varphi_t^{t+\Delta} [\beta_t (1 - \delta \Delta) + f_1(t) \Delta] + 0(\Delta).$$

Представляя, как и раньше, $\varphi_t^{t+\Delta}$ в виде

$$\varphi_t^{t+\Delta} = 1 + \frac{1}{C_2} m_t \Delta \eta_t + 0(\Delta)$$

и устремляя Δ к нулю, придем к стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\beta_t = [f_1(t) - \delta \beta_t] dt + \frac{1}{C_2} m_t \beta_t d\eta_t. \quad (4.9)$$

Сопоставляя (4.8) и (4.9), видим, что $\Omega_t = \delta \beta_t$.

Уравнение для Ω_t . В случае, когда

$$f_2(h) = \begin{cases} 0, & h < 0; \\ \delta e^{-\delta h}, & h \geq 0, \end{cases}$$

для вычисления α_t и β_t необходимость в Ω_t , как видим, не возникает.

Рассмотрим случай, когда

$$f_2(h) = \begin{cases} 0, & h < 0; \\ 1/T_2, & h \in [0, T_2]. \end{cases}$$

Вид дифференциального уравнения для Ω_t будет зависеть от соотношения между t и T_2 .

В том случае, когда $t < T_2$,

$$\Omega_t = \int_0^t \varphi_\theta^t f(\theta, t - \theta) d\theta$$

и

$$\begin{aligned} \Omega_{t+\Delta} &= \int_0^{t+\Delta} \varphi_\theta^{t+\Delta} f(\theta, t + \Delta - \theta) d\theta = \\ &= \varphi_t^{t+\Delta} \left[\int_0^t \varphi_\theta^t f_1(\theta) f_2(t + \Delta - \theta) d\theta + \int_t^{t+\Delta} \varphi_\theta^t f_1(\theta) f_2(t + \Delta - \theta) d\theta \right] + 0(\Delta). \end{aligned}$$

Поскольку в рассматриваемом случае $f_2(t + \Delta - \theta) = f_2(t - \theta) = 1/T_2$, то

$$\Omega_{t+\Delta} = \varphi_t^{t+\Delta} \left[\Omega_t + f_1(t) \frac{1}{T_2} \Delta \right] + 0(\Delta).$$

Подставляя, как и раньше, $\varphi_t^{t+\Delta}$ в виде

$$\varphi_t^{t+\Delta} = 1 + \frac{1}{C_2} m_t \Delta \eta_t + 0(\Delta)$$

и устремляя Δ к нулю, получим уравнение для Ω_t в виде

$$d\Omega_t = \frac{1}{T_2} f_1(t) dt + \frac{1}{C_2} m_t \Omega_t d\eta_t.$$

В случае, когда $t \geq T_2$, выражение для Ω_t имеет вид

$$\Omega_t = \int_{t-T_2}^t \varphi_\theta^t f(\theta, t - \theta) d\theta.$$

Аналогичные преобразования приводят к уравнению

$$d\Omega_t = \frac{1}{T_2} [f_1(t) - f_1(t - T_2) \varphi_{t-T_2}^t] dt + \frac{1}{C_2} m_t \Omega_t d\eta_t.$$

Пример 10. Импульсный сигнал величины r , причем

$$f_1(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \notin [0, T]; \\ 1/T, & \theta \in [0, T]; \end{cases}$$

$$f_2(h) = \begin{cases} 0, & h < 0; \\ \delta e^{-\delta h}, & h \geq 0. \end{cases}$$

В этом случае уравнения для статистик a_t и β_t имеют вид

$$da_t = \delta \beta_t dt;$$

$$d\beta_t = \left(\frac{1}{T} - \delta \beta_t \right) dt + \frac{1}{C_2} r \beta_t d\eta_t.$$

Пример 11. Импульсный сигнал величины r , а плотности распределений θ и h имеют вид

$$f_1(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < 0; \\ \lambda e^{-\lambda \theta}, & \theta \geq 0; \end{cases}$$

$$f_2(h) = \begin{cases} 0, & h < 0; \\ \delta e^{-\delta h}, & h \geq 0. \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения для статистик a_t и β_t имеют вид

$$da_t = \delta \beta_t dt;$$

$$d\beta_t = (\lambda e^{-\lambda t} - \delta \beta_t) dt + \frac{1}{C_2} r \beta_t dt.$$

Пример 12. Импульсный сигнал величины r , при этом

$$f_1(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \notin [0, T_1]; \\ 1/T_1, & \theta \in [0, T_1]; \end{cases}$$

$$f_2(h) = \begin{cases} 0, & h \notin [0, T_2]; \\ 1/T_2, & h \in [0, T_2]. \end{cases}$$

В этом случае

$$da_t = \Omega_t dt;$$

$$d\beta_t = \left(\frac{1}{T_1} - \Omega_t \right) dt + \frac{1}{C_2} r \beta_t d\eta_t.$$

причем, когда $t < T_2$, уравнение для Ω_t имеет вид

$$d\Omega_t = \frac{1}{T_1 T_2} dt - \frac{1}{C_2} r \Omega_t d\eta_t,$$

а при $t > T_2$ -

$$d\Omega_t = \frac{1}{T_1 T_2} \left(1 - \varphi_{t-T_2}^r \right) dt + \frac{1}{C_2} r \Omega_t d\eta_t.$$

Решая уравнения для α_t и β_t и подставляя результаты их решений в формулы (4.4) и (4.5), можно определить текущие значения $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(+)}$. Однако, как и в случае $h = \text{const}$, возможен одноэтапный путь нахождения $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(+)}$ - путь составления уравнений непосредственно для этих статистик и их вычисление в результате решения уравнений.

Для этого так же, как и в случае $h = \text{const}$, используя уравнения для α_t и β_t и функциональную зависимость $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(+)}$ от α_t и β_t , можно с помощью формулы замены переменных составить уравнения для $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(+)}$.

Покажем, как эта процедура может быть выполнена в случае, когда уравнения для α_t и β_t имеют вид

$$d\alpha_t = \delta\beta_t dt;$$

$$d\beta_t = [f(t) - \delta\beta_t] dt + r\beta_t dt,$$

а $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(+)}$ связаны с α_t и β_t соотношениями

$$\pi_t^{(-)} = \frac{\alpha_t}{\alpha_t + \beta_t + P(\theta > t)};$$

$$\pi_t^{(0)} = \frac{\beta_t}{\alpha_t + \beta_t + P(\theta > t)};$$

$$\pi_t^{(+)} = \frac{P(\theta > t)}{\alpha_t + \beta_t + P(\theta > t)}.$$

Необходимые для подстановки в формулу замены переменных производные представлены в табл. 2. Их подстановка позволяет составить уравнение для $\pi_t^{(-)}$:

$$d\pi_t^{(-)} = \frac{1}{[\alpha_t + \beta_t + P(\theta > t)]^2} \left\{ -\alpha_t P^1(\theta > t) + \right. \\ \left. + [\beta_t + P(\theta > t)] \delta\beta_t - \alpha_t [f(t) - \delta\beta_t] - \alpha_t r^2 \beta_t + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_t}{\alpha_t + \beta_t + P(\theta > t)} r^2 \beta_t^2 \right\} dt - \frac{\alpha_t}{[\alpha_t + \beta_t + P(\theta > t)]^2} r\beta_t d\omega_t,$$

которое после представления α_t и β_t через $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$, $\pi_t^{(+)}$; $P^1(\theta > t)$ — через $-f(t)$ и замены $\pi_t^{(-)}$ на $1 - \pi_t^{(0)} - \pi_t^{(+)}$ может быть приведено к виду

$$d\pi_t^{(-)} = \left[\frac{f(t)}{P(\theta > t)} (1 - \pi_t^{(0)} - \pi_t^{(+)}) \pi_t^{(+)} + \delta \pi_t^{(0)} - \right. \\ \left. - \frac{f(t)}{P(\theta > t)} (1 - \pi_t^{(0)} - \pi_t^{(+)}) \pi_t^{(+)} + r^2 (1 - \pi_t^{(0)} - \pi_t^{(+)}) (\pi_t^{(0)})^2 \right] dt - \\ - r (1 - \pi_t^{(0)} - \pi_t^{(+)}) \pi_t^{(0)} d\eta_t.$$

Аналогичным образом составляются уравнения для $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(+)}$:

$$d\pi_t^{(0)} = \left[\frac{f(t)}{P(\theta > t)} \pi_t^{(0)} \pi_t^{(+)} - \delta \pi_t^{(0)} + \frac{f(t)}{P(\theta > t)} (1 - \pi_t^{(0)}) \pi_t^{(+)} - \right. \\ \left. - r^2 (\pi_t^{(0)})^2 (1 - \pi_t^{(0)}) \right] dt + r (1 - \pi_t^{(0)}) \pi_t^{(0)} d\eta_t;$$

$$d\pi_t^{(+)} = \left[-\frac{f(t)}{P(\theta > t)} (1 - \pi_t^{(+)}) \pi_t^{(+)} - \frac{f(t)}{P(\theta > t)} (\pi_t^{(+)})^2 + \right. \\ \left. + r^2 (\pi_t^{(0)})^2 \pi_t^{(+)} \right] dt - r \pi_t^{(0)} \pi_t^{(+)} d\eta_t.$$

И здесь форма представления уравнений для $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(+)}$ выбрана из соображений удобства их проверки: сумма дифференциалов этих вероятностей должна быть равна нулю.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРОЦЕДУР ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

Приступим к оценке эффективности найденных процедур обнаружения сигнала, т. е. к получению численных значений характеристик обнаружения.

Надо вычислить средний выигрыш, вероятность ложной тревоги и время, затрачиваемое на наблюдение. В случае обнаружения, допускающего большие запаздывания с последующим доопределением момента появления сигнала, необходимо также вычислить вероятность правильного определения этого момента.

Расчет этих вероятностей возможен лишь методом статистических испытаний, предполагающим решение на ЭВМ стохастических дифференциальных уравнений для α_t , $\alpha_t^{(*)}$, $\alpha_t^{(m)}$, β_t , нахождение с их помощью σ_t и π_t и сравнение последних с границей областей принятия решений.

Полученные в гл. 4 стохастические дифференциальные уравнения, представленные рекуррентными соотношениями, можно решать на ЦВМ. Если эти уравнения просимметризовать, то их можно решить на АВМ или применить (с использованием ЦВМ) более точные численные методы (Эйлера — Коши, Рунге — Кутта).

5.1. Решение уравнений

Приведенные в предыдущей главе уравнения для статистик являются стохастическими дифференциальными уравнениями Ито. В общем случае стохастическое дифференциальное уравнение можно представить в форме

$$dx_t = a(x_t, t) dt + b(x_t, t) dw_t. \quad (5.1)$$

Особенностью стохастического дифференциального уравнения является то, что, будучи записанным в интегральной форме

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_s, s) ds + \int_0^t b(x_s, s) dw_s, \quad (5.2)$$

оно содержит интеграл

$$I(t) = \int_0^t b(x_s, s) dw_s,$$

в котором под интегральное выражение содержит множители, имеющие диффузионный характер.

Этот интеграл понимается как интеграл Ито, т. е., если $0 < t_1 < \dots < t_n = t$, то

$$I(t) = \text{I. i. m.} \sum_{k=0}^{n-1} b(x_{t_k}, t_k) (w_{t_{k+1}} - w_{t_k}),$$

где *l. i. m.* — предел в среднеквадратическом при $\max(t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$. Отсюда название уравнений и их нелинейный характер.

Чтобы при фиксированных реализациях w_t существовало единственное решение уравнения (5.1), необходимо выполнение определенных ограничений (типа условий Липшица), накладываемых на правую часть уравнения (5.1).

Заменяя интегралы с пределами t_k и t_{k+1} допредельными суммами, можно показать, что уравнению (5.1) соответствует рекуррентное соотношение

$$x_{t_{k+1}} = x_{t_k} + a(x_{t_k}, t_k) \Delta t + b(x_{t_k}, t_k) (w_{t_{k+1}} - w_{t_k}).$$

С его помощью при достаточно малых значениях Δt можно получать решения уравнения (5.1).

Для получения более точных решений или для обеспечения возможности решения при более крупном шаге Δt можно воспользоваться приближенными методами. Последние могут быть аналитическими и численными. В первом случае предполагается, что имеется возможность взятия соответствующих интегралов (метод Пикара). Во втором случае предполагается существование производных и использование ряда Тейлора (методы Рунге — Кутта и Эйлера — Коши).

Рассмотрим возможность использования метода последовательных приближений (метод Пикара) и метода Рунге — Кутта.

При методе последовательных приближений Пикара решение уравнения (5.1) находится с помощью рекуррентных соотношений

$$x_{t_{k+1}}^{(r+1)} = x_{t_k}^{(r)} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(x_s^{(r)}, s) ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(x_s^{(r)}, s) dw_s; \quad (5.3)$$

обеспечивающих сходимость к x_s :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} x_s^{(r)} = x_{t_{k+1}}$$

Покажем, следуя Разевигу [16], как могут быть составлены первая и вторая операции.

В качестве нулевого приближения возьмем $x_{t_k}^{(0)} = x_{t_k}$, тогда первое приближение будет

$$\begin{aligned}
 x_{t_{k+1}}^{(1)} &= x_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(x_{t_k}, s) ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(x_{t_k}, s) dw_s = \\
 &\doteq x_{t_k} + a(x_{t_k}, t_k) \Delta + b(x_{t_k}, t_k)(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}),
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

где $\Delta = t_{k+1} - t_k$.

Подставляя (5.4) в (5.3), получим второе приближение

$$\begin{aligned}
 x_{t_{k+1}}^{(2)} &= x_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} a[x_{t_k} + a(x_{t_k}, t_k)(s - t_k) + \\
 &+ b(x_{t_k}, t_k)(w_s - w_{t_k}), s] ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b[x_{t_k} + a(x_{t_k}, t_k)(s - t_k) + \\
 &+ b(x_{t_k}, t_k)(w_s - w_{t_k}), s] dw_s.
 \end{aligned}$$

Введем обозначения $a = a(x_{t_k}, t_k)$, $b = b(x_{t_k}, t_k)$ и перепишем вторую итерацию в виде

$$\begin{aligned}
 x_{t_{k+1}}^{(2)} &\doteq x_{t_k} + a \Delta + b(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}) + \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} a \right) \frac{\Delta^2}{2} + \\
 &+ \frac{\partial a}{\partial x} b \int_{t_k}^{t_{k+1}} (w_s - w_{t_k}) ds + \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x} a \right) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_k) dw_s + \\
 &+ \frac{\partial b}{\partial x} b \int_{t_k}^{t_{k+1}} (w_s - w_{t_k}) dw_s,
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

где интеграл $\int_{t_k}^{t_{k+1}} (w_s - w_{t_k}) ds$ может быть вычислен точно:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (w_s - w_{t_k}) dw_s = \frac{(w_{t_{k+1}} - w_{t_k})^2 - \Delta}{2},$$

а два других лишь оценены в среднеквадратическом:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (w_s - w_{t_k}) ds = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_k) dw_s \doteq \frac{(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}) \Delta}{2}.$$

После этого выражение (5.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 x_{t_{k+1}} &\stackrel{\circ}{=} x_{t_k} + a \Delta + b (w_{t_{k+1}} - w_{t_k}) + \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} a \right) \frac{\Delta^2}{2} + \\
 &+ \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} b + \frac{\partial b}{\partial x} a \right) \frac{(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}) \Delta}{2} + \\
 &+ \frac{\partial b}{\partial x} b \frac{(w_{t_{k+1}} - w_{t_k})^2 - \Delta}{2}.
 \end{aligned}$$

Если имеет место система стохастических дифференциальных уравнений, в частности, система

$$dx_1(t) = a_1(\tilde{x}_t, t) dt + b_1(\tilde{x}_t, t) dw_t;$$

$$dx_n(t) = a_n(\tilde{x}_t, t) dt + b_n(\tilde{x}_t, t) dw_t,$$

где \tilde{x}_t — n -мерный вектор состояния; w_t — одномерный стандартный винеровский процесс; $a(\tilde{x}, t)$ и $b(\tilde{x}, t)$ — n -мерные вектора коэффициентов, то ее решение (вторая итерация) может быть получено с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned}
 x_i(t_{k+1}) &\stackrel{\circ}{=} x_i(t_k) + a_i \Delta + b_i (w_{t_{k+1}} - w_{t_k}) + \\
 &+ \left(\frac{\partial a_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} a_j \right) \frac{\Delta^2}{2} + \left(\frac{\partial b_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} b_j + \right. \\
 &+ \left. \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_j} a_j \right) \frac{(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}) \Delta}{2} + \\
 &+ \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_j} b_j \frac{(w_{t_{k+1}} - w_{t_k})^2 - \Delta}{2}.
 \end{aligned}$$

Если наблюдается m воздействий, т. е. когда $b(\tilde{x}_t, t)$ представляется $(n+m)$ -матрицей коэффициентов, система уравнений имеет вид

$$dx_1(t) = a_1(\tilde{x}_t, t) + \sum_{q=1}^m b_{1q}(\tilde{x}_t, t) dw_q(t),$$

$$dx_n(t) = a_n(\tilde{x}_t, t) + \sum_{q=1}^m b_{nq}(\tilde{x}_t, t) dw_q(t),$$

то решение может быть получено с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned}
 x_i(t_{k+1}) &= x_i(t_k) + a_i \Delta + \sum_q^m b_{iq} [w_q(t_{k+1}) - w_q(t_k)] + \\
 &+ \left(\frac{\partial a_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} a_j \right) \frac{\Delta^2}{2} + \sum_{q=1}^m \left(\frac{\partial b_{iq}}{\partial t} + \right. \\
 &+ \left. \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} b_{jq} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_{iq}}{\partial x_j} a_j \right) \frac{[w_q(t_{k+1}) - w_q(t_k)] \Delta}{2} + \\
 &+ \sum_{q=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_{iq}}{\partial x_j} \sum_{l=1}^m b_{jl} \psi_{lq},
 \end{aligned}$$

где

$$\psi_{lq} = \begin{cases} \frac{[w_q(t_{k+1}) - w_q(t_k)]^2 - \Delta}{2}, & l = q; \\ \frac{1}{2} [w_l(t_{k+1}) - w_l(t_k)] [w_q(t_{k+1}) - w_q(t_k)], & l \neq q. \end{cases}$$

Для практического использования целесообразно ограничиться второй итерацией, поскольку рекуррентные соотношения для третьей и более высоких итераций громоздки и к тому же не удастся оценить входящие в них интегралы с негауссовскими распределениями.

До сих пор схема Пикара рассматривалась применительно к уравнениям, где наблюдаемое воздействие представлялось винеровским процессом. На практике наблюдаемое воздействие может отличаться от винеровского процесса и представляться, например, дифференциалом

$$d\eta_t = \theta_t dt + dW_t^{(n)},$$

где θ_t — гауссовско-марковский процесс с

$$d\theta_t = -a\theta_t dt + \alpha \sqrt{C_1} dW_t^{(s)}.$$

В этой связи целесообразно остановиться на возможности применения схемы Пикара к решению уравнения вида

$$dx_t = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)d\eta_t. \quad (5.6)$$

Уравнения такого вида типичны для задач обнаружения сигнала θ_t на фоне белого шума.

Применение схемы Пикара непосредственно для решения уравнения (5.6) приводит к образованию интегралов типа

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (\eta_s - \eta_{t_k}) ds, \quad \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_k) d\eta_s, \quad \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\eta_s - \eta_{t_k}) d\eta_s,$$

вычислить которые не удастся. Однако можно $\theta_t dt$ перенести из $d\eta_t$ в $a(x_t, t) dt$ и тем самым вернуться к уравнению вида (5.1).

Включение θ_t в $a(x_t, t)$ приводит (в результате применения схемы Пикара) к образованию слагаемых, которые компенсируются членами, появляющимися от обратной замены $w_{t_{k+1}} - w_{t_k}$ на $\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}$. В результате вид рекуррентных соотношений для (5.6) совпадает с видом рекуррентных соотношений для (5.1) (при условии замены $w_{t_{k+1}} - w_{t_k}$ на $\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}$). Так можно поступать и тогда, когда уравнения имеют вид

$$dx_t = a(x_t, \eta_t, t) dt + b(x_t, \eta_t, t) d\eta_t.$$

Для повышения точности решения (или возможности решения с более крупным шагом) может быть использован и другой прием. Таким приемом является применение метода Рунге — Кутты к решению стохастических дифференциальных уравнений, предварительно приведенных к симметризованному виду

$$dx_t = \left[a(x_t, t) - \frac{1}{2} b(x_t, t) \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} \right] dt + b(x_t, t) \hat{d}\eta_t \quad (5.7)$$

или

$$dx_t = a^*(x_t, t) dt + b(x_t, t) \hat{d}\eta_t,$$

где значок $\hat{\wedge}$ над $d\eta_t$ указывает, что интегрирование этого уравнения предполагает использование интеграла Стратоновича. Поясним, что это означает и почему метод Рунге — Кутты оказывается эффективным.

Как и в случае уравнения (5.1), перепишем (5.7) в виде

$$x_t = x_{t_0} + \int_0^t a^*(x_s, s) ds + \int_0^t b(x_s, s) \hat{d}\eta_s, \quad (5.8)$$

где

$$S(t) = \int_0^t b(x_s, s) \hat{d}\eta_s =$$

$$= \text{l. i. m.} \sum_{k=0}^{n-1} b \left(\frac{x_{t_k} + x_{t_{k+1}}}{2} \right) (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}) -$$

интеграл Стратоновича.

Уравнению (5.8) будет соответствовать рекуррентное соотношение

$$x_{t_{k+1}} = x_{t_k} + a^*(x_{t_k}) \Delta + b \left(\frac{x_{t_k} + x_{t_{k+1}}}{2} \right) (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}),$$

в котором значение $b \left(\frac{x_{t_k} + x_{t_{k+1}}}{2} \right)$ нам неизвестно, так как неизвестно $x_{t_{k+1}}$. Это мешает применению рекуррентного соотношения для решения уравнения (5.7). Использование метода Рунге – Кутта для решения симметризованного уравнения позволяет преодолеть эту трудность.

Метод Рунге – Кутта (а также, например, метод Эйлера – Коши) устроен таким образом, что при его применении образуются $x(t_k + \Delta/2)$, близкие

к значению $\frac{x_{t_k} + x_{t_{k+1}}}{2}$, и вследствие этого не возникает необходи-

мости в явном задании $b \left(\frac{x_{t_k} + x_{t_{k+1}}}{2} \right)$.

Итак, применением метода Рунге – Кутта к решению симметризованных уравнений можно получить результаты, эквивалентные применению второй итерации к решению несимметризованных уравнений. Происходит это несмотря на то, что метод Рунге – Кутта формально не может использоваться для численного решения, поскольку разработан для решения дифференциальных уравнений, описывающих изменение дифференцируемых функций, в то время как функция x_t хотя и непрерывна, не является дифференцируемой.

Только фактическое совпадение результатов, получаемых с помощью второй итерации Пикара, с результатами от применения метода Рунге – Кутта к решению симметризованного уравнения позволяет при использовании метода Рунге – Кутта обращаться с x_t так, как если бы эта функция была дифференцируемой.

Применение метода Рунге – Кутта к решению симметризованных уравнений позволяет получить более точные решения или осуществлять решения при более крупном шаге по сравнению с решениями несимметризованного уравнения Ито.

Аналогичный результат, хотя и несколько уступающий методу Рунге – Кутта, дает метод Эйлера – Коши.

Решение стохастических дифференциальных уравнений путем приведения их к симметризованному виду и использования метода Рунге – Кутта возможно и для случаев, когда наблюдаемый процесс отличен от винеров-

ского, например, когда шумоподобная помеха или сигнал имеют ограниченный спектр и наблюдаемое воздействие представляется дифференциалом

$$d\eta_t = A_0(\eta_t, t) + A_1(\eta_t, t)dt + B_t dw_t^{(s)}.$$

В заключение приведем схему применения метода Рунге – Кутты (четвертого порядка) к решению симметризованного уравнения.

Решение находится в виде

$$x_{t_{k+1}} = x_{t_k} + \frac{1}{6} (A_1 + 2A_2 + 2A_3 + A_4),$$

где

$$A_1 = a(x_{t_k}, t_k) \Delta + b(x_{t_k}, t_k) (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k});$$

$$A_2 = a\left(x_{t_k} + \frac{A_1}{2}, t_k + \frac{\Delta}{2}\right) \Delta + b\left(x_{t_k} + \frac{A_1}{2}, t_k + \frac{\Delta}{2}\right) (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k});$$

$$A_3 = a\left(x_{t_k} + \frac{A_2}{2}, t_k + \frac{\Delta}{2}\right) \Delta + b\left(x_{t_k} + \frac{A_2}{2}, t_k + \frac{\Delta}{2}\right) (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k});$$

$$A_4 = a(x_{t_k} + A_3, t_k + \Delta) \Delta + b(x_{t_k} + A_3, t_k + \Delta) (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}).$$

Рекуррентные соотношения для A_n могут быть записаны в сокращенном виде

$$A_n = a(x_{t_k} + \epsilon A_{n-1}, t_k + \epsilon \Delta) \Delta + b(x_{t_k} + \epsilon A_{n-1}, t_k + \epsilon \Delta) (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}),$$

где

$$\epsilon = \begin{cases} 0, & n = 1; \\ 1/2, & n = 2, 3; \\ 1, & n = 4. \end{cases}$$

Рассмотрим, как могут быть найдены дополнительные члены, появляющиеся в результате симметризации уравнений.

1. При обнаружении шумоподобных сигналов используются уравнения с членами, содержащими интегралы вида $\int_0^t m_s d\eta_s$, причем под η_t будет пониматься процесс с

$$d\eta_t = \begin{cases} \sqrt{C_2} dw_t^{(n)}, & \text{одна помеха;} \\ \sqrt{C_2} dw_t^{(n)} + \theta_t dt, & \text{помеха и сигнал.} \end{cases}$$

В качестве сигнала здесь предполагается процесс с

$$d\theta_t = -a\theta_t dt + a\sqrt{C_1} dw_t^{(s)},$$

а в качестве помехи — белый шум.

Интеграл $\int_0^t m_s d\eta_s$ понимается как интеграл Ито, т. е.

$$\int_0^t m_s d\eta_s = \lim_{\max(t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} m_{t_k} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k})$$

или в иной записи

$$\begin{aligned} \int_0^t m_s d\eta_s &= \lim_{\max(t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_{t_k} + m_{t_{k+1}}}{2} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}) - \\ &- \lim_{\max(t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_{t_{k+1}} - m_{t_k}}{2} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}), \end{aligned} \quad (5.9)$$

где

$$m_{t_{k+1}} - m_{t_k} \doteq -am_{t_k} \Delta + \frac{1}{C_2} \gamma_{t_k} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k} - m_{t_k} \Delta)$$

и

$$\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k} \doteq \begin{cases} \sqrt{C_2} (w_{t_{k+1}}^{(n)} - w_{t_k}^{(n)}), & \text{одна помеха;} \\ \sqrt{C_2} (w_{t_{k+1}}^{(n)} - w_{t_k}^{(n)}) + \theta_{t_k} \Delta, & \text{помеха и сигнал.} \end{cases}$$

Если теперь при нахождении

$$\lim_{\max(t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_{t_{k+1}} - m_{t_k}}{2} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k})$$

пренебречь членами $O(\Delta)$, а вместо $(w_{t_{k+1}}^{(n)} - w_{t_k}^{(n)})^2$ взять его среднее значение Δ , то

$$\text{l. i. m.} \max_{(t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_{t_{k+1}} - m_{t_k}}{2} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}) = \int_0^t \frac{\gamma_s}{2} ds.$$

Первый член в правой части (5.9) представляет собой интеграл Стратоновича и поэтому

$$\int_0^t m_s d\eta_s = \int_0^t m_s \widehat{d}\eta_s - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s ds,$$

откуда следует, что в качестве дополнительного члена выступает слагаемое $-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s ds$.

2. Будут встречаться также уравнения, содержащие члены вида $m_s \beta_s d\eta_s$. В этом случае интеграл Ито $\int_0^t m_s \beta_s d\eta_s$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \int_0^t m_s \beta_s d\eta_s &= \text{l. i. m.} \sum_{k=0}^{n-1} m_{t_k} \beta_{t_k} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}) = \\ &= \text{l. i. m.} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_{t_k} \beta_{t_k} + m_{t_{k+1}} \beta_{t_{k+1}}}{2} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}) - \\ &- \text{l. i. m.} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_{t_{k+1}} \beta_{t_{k+1}} - m_{t_k} \beta_{t_k}}{2} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}). \end{aligned}$$

Второе слагаемое представим в виде

$$\begin{aligned} \text{l. i. m.} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_{t_{k+1}} \beta_{t_{k+1}} - m_{t_{k+1}} \beta_{t_k} + m_{t_{k+1}} \beta_{t_k} - m_{t_k} \beta_{t_k}}{2} \times \\ \times (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}), \end{aligned}$$

где для случая, когда сигналом является низкочастотный шум, задаваемый уравнением (1.8), а помехой — белый шум, справедливы равенства

$$m_{t_{k+1}} (\beta_{t_{k+1}} - \beta_{t_k}) \doteq \left[m_{t_k} - a m_{t_k} \Delta + \frac{1}{C_2} \gamma_{t_k} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k} - m_{t_k} \Delta) \right] \times$$

$$X \left[\frac{1}{T} \Delta + \frac{1}{C_2} m_{t_k} \beta_{t_k} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}) \right];$$

$$\beta_{t_k} (m_{t_{k+1}} - m_{t_k}) \doteq \beta_{t_k} \left[-am_{t_k} \Delta + \frac{1}{C_2} \gamma_{t_k} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k} - m_{t_k} \Delta) \right]$$

При нахождении

$$\text{i. i. m.} \max (t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_{t_{k+1}} \beta_{t_{k+1}} - m_{t_k} \beta_{t_k}}{2} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k})$$

членами порядка $O(\Delta)$ можно пренебречь, а вместо $(\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k})^2$ взять его среднее значение $C_2 \Delta$, тогда

$$\begin{aligned} & \text{i. i. m.} \max (t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_{t_{k+1}} \beta_{t_{k+1}} - m_{t_k} \beta_{t_k}}{2} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}) = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^t m_s^2 \beta_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s \beta_s ds. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл Ито $\int_0^t m_s \beta_s d\eta_s$ может быть представлен в виде

$$\int_0^t m_s \beta_s d\eta_s = \int_0^t m_s \beta_s \widehat{d\eta}_s - \frac{1}{2} \int_0^t m_s^2 \beta_s ds - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s \beta_s ds,$$

где $-\frac{1}{2} \int_0^t m_s^2 \beta_s ds$ и $-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s \beta_s ds$ — дополнительные члены.

Итак, вычисление $\int_0^t m_s d\eta_s$ и $\int_0^t m_s \beta_s d\eta_s$ приводит к появлению дополнительных слагаемых, т. е. к коррекции уравнений. Такая коррекция или приведение к симметризованному виду позволяет понимать их последующее интегрирование не в смысле Ито, а в смысле Стратоновича, что в конечном счете допускает использование методов Эйлера — Коши и Рунге — Кутта.

В заключение следует сказать, что рекуррентные соотношения, соответствующие несимметризованным или симметризованным уравнениям, были рассмотрены так подробно потому, что они определяют алгоритм цифровых систем обнаружения сигнала.

Покажем, как будут выглядеть ранее полученные стохастические дифференциальные уравнения после симметризации.

Пример 13. Сигнал – импульс амплитуды r продолжительностью h .

Симметризации в этом случае подлежит только уравнение для β_t , которое принимает вид

$$d\beta_t = \begin{cases} \left[f(t) - \frac{1}{2C_2} r^2 \beta_t \right] dt + \frac{1}{C_2} r \beta_t \widehat{d\eta}_t, & t < h; \\ \left[f(t) - f(t-h) \varphi_{t-h}^t - \frac{1}{2C_2} r^2 \beta_t \right] dt + \frac{1}{C_2} r \beta_t \widehat{d\eta}_t, & t \geq h. \end{cases}$$

Пример 14. Сигнал – импульс с низкочастотным шумовым заполнением, описываемым уравнением

$$d\theta_t = -a\theta_t dt + a \sqrt{C_1} dw_t^{(s)}$$

и продолжительностью h .

Симметризация не изменяет вида уравнения для α_t , α_t^* и $\alpha_t^{(m)}$, но входящие в них отношения правдоподобия должны содержать симметризованные интегралы, в частности,

$$\varphi_{t-h}^t = \exp \left[\frac{1}{C_2} \int_{t-h}^t m_s \widehat{d\eta}_s - \frac{1}{2C_2} \int_{t-h}^t (m_s + \gamma_s) ds \right].$$

Симметризованное стохастическое дифференциальное уравнение для β_t примет вид

$$d\beta_t = \begin{cases} \left[f(t) - \frac{1}{2C_2} (m_t^2 + \gamma_t) \beta_t \right] dt + \frac{1}{C_2} m_t \beta_t \widehat{d\eta}_t, & t < h; \\ \left[f(t) - f(t-h) \varphi_{t-h}^t - \frac{1}{2C_2} (m_t^2 + \gamma_t) \beta_t \right] dt + \frac{1}{C_2} m_t \beta_t \widehat{d\eta}_t, & t \geq h. \end{cases}$$

5.2. Моделирование процесса обнаружения сигнала

Как и в случае дискретного времени, необходимо выяснить, насколько эффективно МБП для определения процедуры обнаружения, а также оценить возможное увеличение вероятности обнаружения за счет допускаемого запаздывания в принятии решения о появлении сигнала.

Моделирование процесса обнаружения в принципе можно вести на АВМ и ЦВМ.

При использовании АВМ дифференциал $d\eta_t$ заменяется на $d\eta_H(t) = \eta_H(t) dt$, где H означает, что процесс с $\eta_H(t)$ получается из η_t в результате прохождения его через фильтр, пропускающий лишь частоты $[0, H]$.

На возможность такой замены обращено внимание в работе [25], где отмечено, что интеграл Стратоновича

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t b(x_s) \widehat{d\eta}_s = \\ &= \text{l. i. m.}_{\max(t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} b \left(\frac{x_{t_k} + x_{t_{k+1}}}{2} \right) (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}). \end{aligned}$$

может рассматриваться как предел в среднеквадратическом при $H \rightarrow \infty$ интеграла

$$S_H(t) = I_H(t) = \int_0^t b(x_s) d\eta_H(s) = \int_0^t b(x_s) \dot{\eta}_H(s) ds.$$

Отсюда следует необходимость перехода к симметризованным уравнениям. В результате уравнения Ито приближенно (из-за конечности H) могут решаться на АВМ, если их представить в виде

$$dx_H(t) = a[x_H(t), t] dt + b[x_H(t), t] \eta_H(t) dt + K(t) dt,$$

где через $K(t)$ обозначены дополнительные члены, появляющиеся при симметризации. Однако нестабильность параметров АВМ приводит к появлению погрешностей в решении уравнений, поэтому предпочтительнее использование цифровых машин.

Это замечание относится и к выбору варианта аппаратуры, предназначенной для работы с реальными входными воздействиями. Здесь с помощью аналогового интегратора образуются значения $\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}$, а затем аналого-цифровым преобразователем входные воздействия должны быть представлены в цифровом виде для того, чтобы вся последующая обработка (решение стохастических дифференциальных уравнений и сравнение вычисленных таким образом статистик с границей) велась на ЦВМ.

Моделирование начинается с розыгрыша момента начала воздействия сигнала θ и образования реализации процесса, соответствующего сигналу. Если сигнал может быть описан гауссовским марковским процессом, представляемым дифференциальным уравнением

$$d\theta_t = -\alpha\theta_t dt + \alpha\sqrt{C_1} dw_t^{(s)},$$

то для его моделирования может использоваться рекуррентное соотношение

$$\theta_{t_{k+1}} = \theta_{t_k} - \alpha\theta_{t_k} \Delta + \alpha\sqrt{C_1} [w_{t_{k+1}}^{(s)} - w_{t_k}^{(s)}].$$

Для задания приращения винеровского процесса $w_{t_{k+1}}^{(s)} - w_{t_k}^{(s)}$ естественно использовать получаемые с ЦВМ случайные числа $x_{t_k} \in N(0,1)$.

Ими можно представить случайную величину

$$x_{t_k} = \frac{w_{t_n} - w_{t_m}}{\sqrt{t_n - t_m}},$$

имеющую нулевое значение и единичную дисперсию, откуда

$$w_{t_{k+1}}^{(s)} - w_{t_k}^{(s)} = \sqrt{\Delta} x_{t_{k+1}}^{(s)}.$$

В результате для моделирования низкочастотного процесса, соответствующего уравнению (1.8), может быть использовано рекуррентное соотношение

$$\theta_{t_{k+1}} = \theta_{t_k} - \alpha \theta_{t_k} \Delta + \alpha \sqrt{C_1 \Delta} x_{t_{k+1}}^{(s)}$$

с начальным условием $\theta_0 = \sqrt{\frac{\alpha C_1}{2}} x_0$. Последнее обеспечивает стационарность процесса и независимость его реализаций.

Высокочастотный процесс, как уже отмечалось, удобно представлять уравнениями

$$d\theta_t = v_t^{(1)} dt;$$

$$dv_t^{(1)} = -(b_1 v_t^{(1)} + b_0 \theta_t) dt + b_1 \sqrt{(b_0 - b_1^2/4) C_1} dw_t^{(s)},$$

которым будут соответствовать рекуррентные соотношения

$$\theta_{t_{k+1}} = \theta_{t_k} + v_{t_k}^{(1)} \Delta;$$

$$v_{t_{k+1}}^{(1)} = v_{t_k}^{(1)} - (b_1 v_{t_k}^{(1)} + b_0 \theta_{t_k}) \Delta + b_1 \sqrt{(b_0 - b_1^2/4) C_1} \Delta x_{t_{k+1}}^{(s)}.$$

Для обеспечения стационарности процесса θ_t и независимости его реализаций начальные условия для θ_t и $v_t^{(1)}$ должны определяться соответствующими формулами (они, конечно, могут быть составлены). Но можно начальные условия получать и автоматически, если моделирование сигнала начинать несколько раньше момента подключения сигнала θ (по окончании переходного процесса).

Наблюдаемое воздействие может быть представлено в виде

$$\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k} = \begin{cases} \sqrt{C_2 \Delta} x_{t_{k+1}}^{(n)}, & \text{одна помеха;} \\ \sqrt{C_2 \Delta} x_{t_{k+1}}^{(n)} + \theta_{t_k} \Delta, & \text{помеха и сигнал.} \end{cases}$$

Решение уравнений для статистик, как уже отмечалось, возможно в двух вариантах — с помощью несимметризованных и симметризованных уравнений.

В первом случае для моделирования статистик могут использоваться следующие рекуррентные соотношения ($h = \text{const}$, первая итерация):

$$a_{t_{k+1}} = \begin{cases} 0, & t_k < h; \\ \alpha_{t_k} + f(t_k - h) \varphi_{t_k - h}^{t_k} \Delta, & t_k \geq h; \end{cases}$$

$$\beta_{t_{k+1}} = \begin{cases} \beta_{t_k} + f(t_k) \Delta + \frac{1}{C_2} m_{t_k} \beta_{t_k} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}), & t_k < h; \\ \beta_{t_k} + [f(t_k) - f(t_{k-h}) \varphi_{t_k-h}^{t_k}] \Delta + \frac{1}{C_2} m_{t_k} \beta_{t_k} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}), & t_k \geq h, \end{cases}$$

а для уравнений Калмана – Бьюси (при низкочастотном сигнале) –

$$m_{t_{k+1}} = m_{t_k} - \alpha m_{t_k} \Delta + \frac{1}{C_2} \gamma_{t_k} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k} - m_{t_k} \Delta);$$

$$\gamma_{t_{k+1}} = \gamma_{t_k} - (2\alpha \gamma_{t_k} + \frac{1}{C_2} \gamma_{t_k}^2 - \alpha^2 C_1) \Delta.$$

Для моделирования $\varphi_{t_k-h}^{t_k}$ сначала вычисляются

$$\psi_{t_k}^{t_{k+1}} = \frac{1}{C_2} m_{t_k} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}) - \frac{1}{2C_2} m_{t_k}^2 \Delta,$$

а затем находится сумма

$$\psi_{t_k-h}^{t_k} = \psi_{t_k-h}^{t_{k+1}-h} + \dots + \psi_{t_{k-1}}^{t_k}$$

и

$$\varphi_{t_k-h}^{t_k} = e^{\psi_{t_k-h}^{t_k}}.$$

Понятно, что когда сигнал не случаен, т. е. имеет постоянную величину r , m_t в уравнениях заменяется на r , а уравнения Калмана – Бьюси оказываются не нужными.

Аналогичный вид будут иметь рекуррентные соотношения для статистик α_t^* , $\alpha_t^{(m)}$, а также для статистик, соответствующих условиям, когда продолжительность сигнала h случайна (статистики $\alpha_t, \beta_t, \Omega_t$).

Во втором случае уравнения для β_t сначала симметризируются, а затем решаются методом Рунге – Кутты по схеме

$$\alpha_{t_{k+1}} = \begin{cases} 0, & t_k < h; \\ \alpha_{t_k} + \frac{1}{6} (A_1 + 2A_2 + 2A_3 + A_4), & t_k \geq h; \end{cases}$$

$$A_n = a (\alpha_{t_k} + \epsilon A_{n-1}, t_k + \epsilon \Delta) \Delta;$$

$$\beta_{t_{k+1}} = \begin{cases} \beta_{t_k} + \frac{1}{6} (B_1^{(1)} + 2B_2^{(1)} + 2B_3^{(1)} + B_4^{(1)}), & t_k < h; \\ \beta_{t_k} + \frac{1}{6} (B_1^{(2)} + 2B_2^{(2)} + 2B_3^{(2)} + B_4^{(2)}) & t_k \geq h; \end{cases}$$

$$B_n^{(i)} = a^{(i)} (\beta_{t_k} + \epsilon B_{n-1}^{(i)} m_{t_k} + \epsilon C_{n-1}, t_k + \epsilon \Delta) \Delta +$$

$$+ b^{(i)} (\beta_{t_k} + \epsilon B_{n-1}^{(i)}, m_{t_k} + \epsilon C_{n-1}, t_k + \epsilon \Delta) (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}),$$

$$i = 1, 2 \quad (i = 1 \text{ при } t_k < h, \quad i = 2 \text{ при } t_k \geq h);$$

$$m_{t_{k+1}} \doteq m_{t_k} + \frac{1}{6} (C_1 + 2C_2 + 2C_3 + C_4).$$

$$C_n = a (m_{t_k} + \epsilon C_{n-1}, \gamma_{t_k} + \epsilon D_{n-1}, t_k + \epsilon \Delta) \Delta +$$

$$+ b (m_{t_k} + \epsilon C_{n-1}, \gamma_{t_k} + \epsilon D_{n-1}, t_k + \epsilon \Delta) (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k});$$

$$\gamma_{t_{k+1}} \doteq \gamma_{t_k} + \frac{1}{6} (D_1 + 2D_2 + 2D_3 + D_4);$$

$$D_n = a (\gamma_{t_k} + \epsilon D_{n-1}, t_k + \epsilon \Delta) \Delta;$$

$$\epsilon = \begin{cases} 0, & n=1; \\ 1/2, & n=2, 3; \\ 1, & n=4. \end{cases}$$

5.2.1. Обнаружение, допускающее малые запаздывания

Обнаружение одиночного сигнала. Сначала покажем, что МБП остается эффективным для определения процедуры обнаружения в случае непрерывного времени. С этой целью для случаев $h = \text{const}$ и $h = \text{var}$ определим, соответствует ли наибольший средний выигрыш расчетной границе.

Случай $h = \text{const}$. Своевременному обнаружению соответствует функция выигрыша вида

$$W(\nu, \theta) = \begin{cases} 0, & \nu < \theta; \\ 1, & \nu \in [\theta, \theta + h]; \\ 0, & \nu > \theta. \end{cases}$$

Напомним, что в этом случае для обнаружения должна использоваться статистика $\sigma_t = \pi_t^{(0)} + \pi_t$ и граница $\Gamma_t = 1$.

При равномерном распределении момента появления сигнала амплитуды γ выражения для $\pi_t^{(0)}$ и π_t принимают вид

$$\pi_t^{(0)} = \frac{\beta_t}{\alpha_t + \beta_t + (T-t)/T};$$

$$\pi_t = \frac{\alpha_t + \beta_t}{\alpha_t + \beta_t + (T-t)/T};$$

а α_t и β_t находятся в результате решения рекуррентных уравнений

$$a_{t_{k+1}} = \begin{cases} 0, & t_k < h; \\ a_{t_k} + \frac{1}{T} \varphi_{t_k-h}^{t_k} \Delta, & t_k \geq h; \end{cases}$$

$$\beta_{t_{k+1}} = \begin{cases} \beta_{t_k} + \frac{1}{T} \Delta + \frac{1}{C_2} r \beta_{t_k} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}), & t_k < h; \\ \beta_{t_k} + \frac{1}{T} (1 - \varphi_{t_k-h}^{t_k}) \Delta + \frac{1}{C_2} r \beta_{t_k} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}), & t_k \geq h. \end{cases}$$

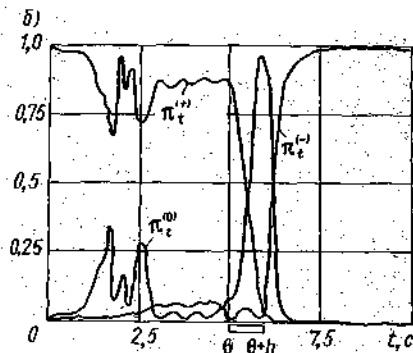
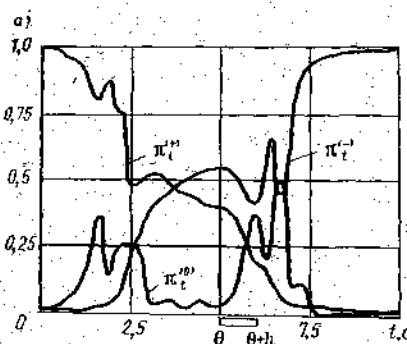


Рис. 14. Реализации статистик: а - при $\gamma = 2$; б - при $\gamma = 4$.

В результате моделирования при $T=10$ с, $r=2$, $C_2=1$, $\Delta=0,01$ с по 10^3 реализациям (по одному подключению сигнала в $t_k=0, \Delta, \dots, T$) было установлено, что $P_{\text{л.т.}}=0,140$, $P_{\text{св.обн}}=0,465$ при $T_{\text{ср.}}^{(0)k}=6,86$ с.

Было также установлено, что изменение границы по сравнению с расчетной ($\Gamma_t=1$) приводит к уменьшению вероятности обнаружения: повышение границы на 20% уменьшает $P_{\text{св.обн}}$ до 0,408, а при снижении границы на 20% — до 0,424. Реализации $\pi(\frac{\cdot}{t})$, $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(t)}$ представлены на рис. 14(а, б).

Возможность некоторого увеличения вероятности обнаружения за счет запаздывания, когда

$$W(v, \theta) = \begin{cases} 0, & v < \theta; \\ 1, & v \in [\theta, \theta + (m+1)h]; \\ 0, & v > \theta + (m+1)h, \end{cases}$$

была подтверждена в результате моделирования процесса обнаружения с использованием статистики

$$\sigma_{t_k} = \pi_{t_k}^{(m)} + \pi_{t_k},$$

где

$$\pi_{t_k}^{(m)} = \frac{1 - \pi_{t_k}}{T - t_k} (a_{t_k}^{(m)} + \beta_{t_k}^{(m)}); \quad t_k < h,$$

$$\alpha_{t_{k+1}}^{(m)} = \begin{cases} 0, & \\ \alpha_{t_k}^{(m)} + \frac{1}{T} \varphi_{t_k - h}^{t_k} \Delta & t_k \in [h, (m+1)h] \\ \alpha_{t_k}^{(m)} + \frac{1}{T} (-\varphi_{t_k - (m+1)h}^{t_k - mh} + \varphi_{t_k - h}^{t_k}) \Delta, & t_k > (m+1)h, \end{cases}$$

и границы $\Gamma_{t_k} = 1$.

Было установлено, что при $m=2$, $P_{\text{л.т.}}=0,121$ и $T_{\text{ср.}}^{(m)}=6,91$ с $P_{\text{обн}}$ (средний выигрыш) возрастает до 0,521. Установлено, что граница сохраняет свою оптимальность и при больших запаздываниях, если при этом увеличивается интервал $[0, T]$, на котором появляется сигнал. Здесь, естественно, повторяются результаты, полученные для случая дискретного времени (см. § 1.3).

Случай $h = \text{var}$. Функция выигрыша и формулы для вычисления $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(t)}$ соответствуют предыдущему случаю, а рекуррентные соотношения для α_{t_k} и β_{t_k} принимают вид

$$\alpha_{t_{k+1}} = \alpha_{t_k} + \delta \beta_{t_k} \Delta; \quad (5.10)$$

$$\beta_{t_{k+1}} = \beta_{t_k} + (1/T - \delta\beta_{t_k}) \Delta + r\beta_{t_k} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}). \quad (5.11)$$

В результате моделирования при $T=10$ с, $\delta=1$, $r=2$, $C_2=1$, $\Delta=10^{-3}$ с по 10^3 реализациям (по одному подключению сигнала в $t_k=0, 10\Delta, \dots, F$) было установлено, что $P_{л.т} = 0,320$, $P_{св.обн} = 0,311$ при $T_{ср} = 7,03$ с.

Изменение границы по сравнению с расчетной ($\Gamma_t = 1$) приводит к уменьшению $P_{св.обн}$; повышение границы на 20% уменьшает $P_{св.обн}$ до 0,299, а снижение на 20% — до 0,290.

Покажем, как зависит точность решения уравнений для α_t и β_t от шага временной дискретизации Δ . Выполним это в варианте несимметризованных уравнений (первая и вторая итерации по Пикару) и в варианте симметризованных уравнений, решаемых методом Рунге — Кутта.

Первой итерации по Пикару соответствуют рекуррентные соотношения (5.10) и (5.11)

Второй итерации, согласно § 5.1, будут соответствовать рекуррентные соотношения ($C_2=1$)

$$\begin{aligned} \alpha_{t_{k+1}} &= \alpha_{t_k} + \delta\beta_{t_k} \Delta + \left(\frac{1}{T} - \delta\beta_{t_k} \right) \delta \frac{\Delta^2}{2} + r\delta\beta_{t_k} \frac{(\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}) \Delta}{2}, \\ \beta_{t_{k+1}} &= \beta_{t_k} + \left(\frac{1}{T} - \delta\beta_{t_k} \right) \Delta + r\beta_{t_k} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}) - \\ &- \left(\frac{1}{T} - \delta\beta_{t_k} \right) \delta \frac{\Delta^2}{2} + r \left[\left(\frac{1}{T} - \delta\beta_{t_k} \right) - \delta\beta_{t_k} \right] \times \\ &\times \frac{(\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}) \Delta}{2} + r^2 \beta_{t_k} \frac{(\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k})^2 - \Delta}{2}. \end{aligned}$$

Симметризованные уравнения (от симметризации зависит только уравнение для β_t) будут иметь вид

$$d\alpha_t = \delta\beta_t dt;$$

$$d\beta_t = [1/T - (\delta + r^2/2)\beta_t] dt + \frac{1}{C_2} r\beta_t d\eta_t.$$

Решение этой системы методом Рунге — Кутта может быть выполнено с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\alpha_{t_{k+1}} = \alpha_{t_k} + \frac{1}{6} (A_1 + 2A_2 + 2A_3 + A_4);$$

$$A_n = \delta (\beta_{t_k} + \epsilon B_{n-1}) \Delta;$$

$$\beta_{t_{k+1}} = \beta_{t_k} + \frac{1}{6} (B_1 + 2B_2 + 2B_3 + B_4);$$

$$B_n = \left[\frac{1}{T} - \left(\delta + \frac{r^2}{2} \right) \left(\beta_{t_k} + \epsilon B_{n-1} \right) \right] \Delta + r (\beta_{t_k} + \epsilon B_{n-1}) \quad \times$$

$$\times (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k});$$

$$\epsilon = \begin{cases} 0, & n=1; \\ 1/2, & n=2, 3; \\ 1, & n=4. \end{cases}$$

Результаты решений несимметризованных уравнений методом Пикара и симметризованных методом Рунге – Кутта при шаге $\Delta = 10^{-4}$ с практически совпадают. Расхождение (для одной и той же реализации η_0^t) начинается по мере укрупнения шага. В табл. 3 приведены значения среднего квадрата разности для каждого из методов решения по отношению к значениям β_t и σ_t при шаге $\Delta = 10^{-4}$ с.

Приведенные в таблице данные получены в результате усреднения квадратов разностей на каждом шаге для одной реализации длительностью 10 с и последующим усреднением по 20 реализациям.

Обнаружение пачки сигналов. Покажем, что МБП может применяться и для определения процедуры обнаружения пачки сигналов.

Рассмотрим случай, когда распределение момента появления сигнала равномерно на $[0, T]$, т. е.

$$f(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < 0; \\ 1/T, & \theta \in [0, T]; \\ 0, & \theta > T. \end{cases}$$

Т а б л и ц а 3. Ошибки временной дискретизации

Шаг Δ , с	0,001		0,01		0,1	
	β_t	σ_t	β_t	σ_t	β_t	σ_t
Пикар 1-я итерация	$3,38 \cdot 10^{-3}$	$1,67 \cdot 10^{-4}$	$6,8 \cdot 10^{-2}$	$2,11 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$4,55 \cdot 10^{-2}$
Пикар 2-я итерация	$8,2 \cdot 10^{-5}$	$6,8 \cdot 10^{-5}$	$5,5 \cdot 10^{-4}$	$7,53 \cdot 10^{-4}$	$1,14 \cdot 10^{-1}$	$8,23 \cdot 10^{-3}$
Рунге – Кутт	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$8,3 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$1,02 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$1,96 \cdot 10^{-2}$

В течение первого цикла статистика

$$\sigma_{t_k}^{(1)} = \pi_{t_k}^{(0)} + \pi_{t_k} = \frac{\alpha_{t_k} + 2\beta_{t_k}}{\alpha_{t_k} + \beta_{t_k} + (T-t)/T}$$

вычисляется с помощью рекуррентных соотношений

$$\alpha_{t_{k+1}} = \begin{cases} 0, & t_k < h; \\ \alpha_{t_k} + \frac{1}{T} \varphi_{t_k-h}^{t_k} \Delta, & t_k \geq h; \end{cases}$$

$$\beta_{t_{k+1}} = \begin{cases} \beta_{t_k} + \frac{1}{T} \Delta + \frac{1}{C_2} r \beta_{t_k} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}), & t_k < h; \\ \beta_{t_k} + \frac{1}{T} (1 - \varphi_{t_k-h}^{t_k}) \Delta + \frac{1}{C_2} r \beta_{t_k} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}), & t_k \geq h. \end{cases}$$

Так вычисляемая статистика $\sigma_{t_k}^{(1)}$ сравнивается с границей $\Gamma=1$. В случае достижения границы принимается решение об обнаружении сигнала, и наблюдения прекращаются. Если $\sigma_{t_k}^{(1)}$ границы не достигает, то в конце цикла в момент t_M вычисляется $\pi_{t_M}^{(1)}$ и определяется апостериорная плотность

$$f^{(1)}(\theta | \eta_0^{t_M}) = \begin{cases} \varphi_{t_k}^{(1)t_k+h} \left(1 - \pi_{t_M}^{(1)}\right) \frac{1}{T-t_M}, & \theta \leq t_M; \\ \left(1 - \pi_{t_M}^{(1)}\right) \frac{1}{T-t_M}, & \theta > t_M. \end{cases}$$

Во втором цикле обнаружению сигнала предшествует определение априорного распределения в виде

$$f^{(2)}(\theta) = \begin{cases} f^{(1)}(\theta | \eta_0^{t_M}), & \pi_{t_M}^{(1)} \geq \frac{t_M}{T}; \\ \frac{1}{T-t_M}, & \pi_{t_M}^{(1)} < \frac{t_M}{T}. \end{cases}$$

Статистика

$$\sigma_{t_k}^{(2)} = \frac{\alpha_{t_k}^{(2)} + 2\beta_{t_k}^{(2)}}{\alpha_{t_k}^{(2)} + \beta_{t_k}^{(2)} + P(\theta > t_k)}$$

вычисляется с помощью рекуррентных соотношений

$$\alpha_{t_k+1}^{(2)} = \begin{cases} 0, & t_k < h; \\ \alpha_{t_k}^{(2)} + f^{(2)}(t_k) \varphi_{t_k-h}^{(2)} \Delta, & t_k \geq h; \end{cases}$$

$$\beta_{t_k+1}^{(2)} = \begin{cases} \beta_{t_k}^{(2)} + f^{(2)}(t_k) \Delta + \frac{1}{C_2} r \beta_{t_k}^{(2)} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}), & t_k < h; \\ \beta_{t_k}^{(2)} + f^{(2)}(t_k) (1 - \varphi_{t_k-h}^{(2)}) \Delta + \frac{1}{C_2} r \beta_{t_k}^{(2)} (\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}), & t_k \geq h. \end{cases}$$

при начальных условиях $\alpha_{t_0} = 0$ и $\beta_{t_0} = 0$.

Если статистика σ_{t_k} достигает границы, то принимается решение об обнаружении сигнала, и наблюдение прекращается. Если σ_{t_k} не достигает границы, то в момент t_k вычисляется $\pi_{t_M}^{(2)}$ и апостериорная плотность

$$f^{(2)}(\theta | \eta_0^{t_M}) = \begin{cases} \varphi_{t_k}^{(2) t_k+h} (1 - \pi_{t_M}^{(2)}) \frac{f^{(2)}(\theta)}{f_*^{(2)}(\theta)(T - 2t_M)}, & \theta \leq t_M; \\ (1 - \pi_{t_M}^{(2)}) \frac{1}{T - 2t_M}, & \theta > t_M, \end{cases}$$

где $f_*^{(2)}(\theta)$ — значение $f^{(2)}(\theta)$, соответствующее случаю $\theta > t_M$.

В третьем цикле обнаружению сигнала предшествует определение априорной плотности

$$f^{(3)}(\theta) = \begin{cases} f^{(2)}(\theta | \eta_0^{t_M}), & \pi_{t_M}^{(2)} \geq \frac{t_M}{T - t_M}, \\ \frac{1}{T - 2t_M}, & \pi_{t_M}^{(2)} < \frac{t_M}{T - t_M}. \end{cases}$$

Статистика $\sigma_{t_k}^{(3)}$ вычисляется с помощью рекуррентных соотношений для $\sigma_{t_k}^{(2)}$, в которых индекс (2) заменяется на (3), а формула для $f^{(3)}(\theta | \eta_0^{t_M})$ получается из формулы для $f^{(2)}(\theta | \eta_0^{t_M})$ заменой индекса (2) на (3) и $T - 2t_M$ на $T - 3t_M$.

Аналогично определяется процедура вычислений для последующих циклов.

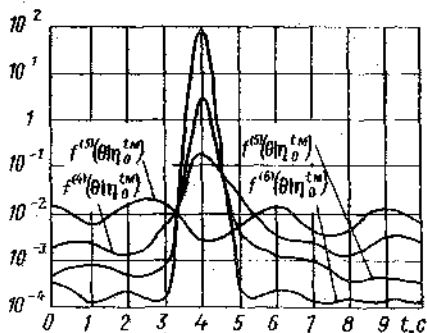


Рис. 15. Апостериорные распределения моментов появления сигнала.

в первом цикле $-P_{\text{пр.обн}}^{(1)} = 0,131$, во втором цикле $-P_{\text{пр.обн}}^{(2)} = 0,242$, в третьем цикле $-P_{\text{пр.обн}}^{(3)} = 0,173$, т. е. $P_{\text{пр.обн}} = P_{\text{пр.обн}}^{(1)} + P_{\text{пр.обн}}^{(2)} + P_{\text{пр.обн}}^{(3)} = 0,546$.

Изменение границы до значений $\Gamma = 0,8$ и $\Gamma = 1,2$ приводит к уменьшению $P_{\text{пр.обн}}$ соответственно до 0,523 и 0,517, что свидетельствует о возможности применения МБП для определения процедуры обнаружения сигнала в рассмотренном случае.

5.2.2. Обнаружение, допускающее большие запаздывания

Первичный поиск. Сначала удостоверимся в эффективности МБП для определения процедуры обнаружения. Для этого сравним средний выигрыш, получаемый в случае использования расчетной границы и границ, отличающихся от расчетной.

Рассмотрим случай, когда функция выигрыша имеет вид

$$W(v, \theta) = \begin{cases} 0, & v < \theta; \\ 1 - k(v - \theta), & v \geq \theta, \end{cases}$$

а момент начала воздействия сигнала распределен равномерно на $[0, T]$. В этом случае для обнаружения используются статистика π_t и граница Γ_t , определяемые формулами

$$\pi_t = \frac{\alpha_t + \beta_t}{\alpha_t + \beta_t + (T - t)/T};$$

$$\Gamma_t = \frac{1}{1 + k(T - t)},$$

где α_t и β_t вычисляются с помощью рекуррентных соотношений.

В результате статистического эксперимента (по 10^4 реализациям) при $k=0,1$ было установлено, что значение среднего выигрыша составляет 0,621 и изменение границы по сравнению с расчетной приводит к его уменьшению.

Выясним, как увеличится вероятность правильного определения момента появления сигнала, если обнаружение сочеталось с последующим доопределением этого момента, и насколько при этом возрастет время наблюдения.

Для определения момента появления сигнала после прекращения наблюдений (момент t_{k*}) вычисляются значения апостериорных вероятностей

$$P \left\{ \theta \in [\hat{\theta} - h, \hat{\theta}] | \eta_0^{t_{k*}} \right\} = \sum_{\theta_j \in [\hat{\theta} - h, \hat{\theta}]} f(\theta_j | \eta_0^{t_{k*}}) \Delta$$

и принимается решение, что сигнал имел место на интервале $[t_k - h, t_k]$, если $P \left\{ \theta \in [t_k - h, t_k] | \eta_0^{t_{k*}} \right\} = \max$. При этом правильным определением момента появления сигнала считается такое, при котором начало сигнала действительно было на интервале $[t_k - h, t_k]$.

Вычисленные плотности распределения моментов появления сигнала (начала воздействия) $f(\theta | \eta_0^{t_{k*}})$ возможно с помощью формулы (3.1).

Когда $t_{k*} \in [0, h]$,

$$f(\theta | \eta_0^{t_{k*}}) = \varphi_{\theta}^{t_{k*}} \frac{1 - \pi_{t_{k*}}}{T - t_{k*}}, \quad \theta > 0.$$

Если $t_{k*} \in [h, T]$,

$$f(\theta | \eta_0^{t_{k*}}) = \begin{cases} \varphi_{\theta}^{\theta+h} \frac{1 - \pi_{t_{k*}}}{T - t_{k*}}, & \theta \leq t_{k*} - h; \\ \varphi_{\theta}^{t_{k*}} \frac{1 - \pi_{t_{k*}}}{T - t_{k*}}, & \theta > t_{k*} - h. \end{cases}$$

При $t_{k*} = T$

$$f(\theta | \eta_0^{t_{k*}}) = \begin{cases} \varphi_{\theta}^{\theta+h} \left(\sum_{t_j \in [0, T]} \varphi_{t_j}^{t_j+h} \Delta \right)^{-1}, & \theta \leq T - h; \\ \varphi_{\theta}^T \left(\sum_{t_j \in [0, T]} \varphi_{t_j}^{t_j+h} \right)^{-1} & \theta > T - h. \end{cases}$$

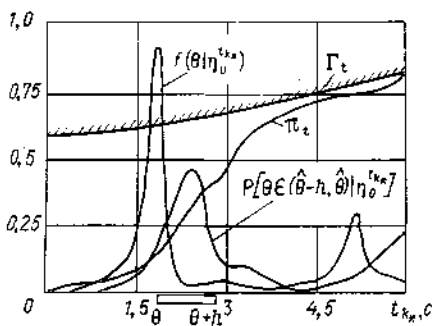


Рис. 16. Статистика и апостериорное распределение моментов появления сигнала.

На рис. 16 представлены априорное распределение $f(\theta)$, граница Γ_t , реализация π_{t_k} , пересекающая границу в момент t_{k*} и соответствующее этой реализации апостериорное распределение $f(\theta | \eta_0^{t_{k*}})$.

В результате статистического эксперимента было установлено, что при $T=10$ с, $r=2$, $h=1$ с, $\Delta=0,01$ с при числе реализаций 10^3 (по одному подключению сигнала в моменты $0, \Delta, \dots$)

характеристики обнаружения имеют значения, представленные в табл. 4.

Итак, обнаружение, допускающее большие запаздывания, в сочетании с процедурой доопределения момента его появления, позволяет получить большее значение вероятности обнаружения, чем в случае своевременного обнаружения или обнаружения, допускающего малые запаздывания.

Повторный поиск. Повторный поиск организуется для увеличения вероятности правильного нахождения момента появления сигнала. Поэтому важно определить насколько эта вероятность может быть увеличена и какое дополнительное время наблюдения на это потребуется.

Повторный поиск начинается сразу после окончания (момент t_{k*}) первичного поиска и происходит в условиях нового априорного распределения $f^{(2)}(\theta)$ моментов начала воздействия сигнала, определяемого апостериорными плотностями $f(\theta | \eta_0^{t_{k*}})$, которые вычисляются по результатам наблюдений при первичном поиске. Внесенное в память ЦВМ новое априорное распределение $f^{(2)}(\theta)$ будет использоваться для повторного поиска.

Для того чтобы процедура обнаружения при повторном поиске оказалась аналогичной процедуре при первичном поиске, надо все ординаты распределения $f(\theta | \eta_0^{t_{k*}})$ сместить вправо на h , т. е. отнести их к концу времени воздействия сигнала, являющегося при повторном поиске началом наблюдения.

Таблица 4. Эффективность обнаружения

k	$P_{д.т.}$	$P_{пр. обн}$	$T_{ср}, с$
0	0,020	0,596	9,86
0,1	0,112	0,575	7,20
0,2	0,293	0,511	5,38
0,3	0,445	0,426	4,21

Статистика π_{t_i} при повторном поиске вычисляется по формуле

$$\pi_{t_i} = \frac{\alpha_{t_i} + \beta_{t_i}}{\alpha_{t_i} + \beta_{t_i} + \sum_{t_j \in [t_i+1, T-h]} f^{(2)}(t_j) \Delta}, \quad (5.12)$$

где $t_i = T - t_k$ — моменты времени в обратном направлении, отсчитываемые от $T+h$.

Необходимые для формулы (5.12) значения α_{t_i} и β_{t_i} находятся с помощью рекуррентных соотношений

$$\alpha_{t_{i+1}} = \begin{cases} \alpha_{t_i} + f^{(2)}(t_i - h) \varphi_{t_i^*}^{t_i} \Delta, & t_i \in [t_{i^*}, t_{i^*} + h]; \\ \alpha_{t_i} + f^{(2)}(t_i - h) \varphi_{t_i - h}^{t_i} \Delta, & t_i \in [t_{i^*} + h, T - h]; \end{cases}$$

$$\beta_{t_{i+1}} = \begin{cases} \beta_{t_i} + [f^{(2)}(t_i) - f^{(2)}(t_i - h) \varphi_{t_i^*}^{t_i}] \Delta + \frac{1}{C_2} r(\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}), & t_i \in [t_{i^*}, t_{i^*} + h]; \\ \beta_{t_i} + [f^{(2)}(t_i) - f^{(2)}(t_i - h) \varphi_{t_i - h}^{t_i}] \Delta + \frac{1}{C_2} r(\eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}), & t_i \in [t_{i^*} + h, T - h] \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\alpha_{t_{i^*}} = \left(\alpha_{t_{k^*}} + \beta_{t_{k^*}} - \frac{(T - t_{k^*})}{T} \right) (1/\pi_{t_{k^*}} - 1) - \beta_{t_{k^*}};$$

$$\beta_{t_{i^*}} = \frac{(\alpha_{t_{k^*}} + \beta_{t_{k^*}}) \beta_{t_{k^*}}}{\alpha_{t_{k^*}} + \beta_{t_{k^*}} + (T - t_{k^*})/T}.$$

Значения π_{t_i} сравниваются с границей, определяемой формулой, аналогичной случаю дискретного времени

$$\Gamma_{t_i} = \frac{\sum_{j=i+1}^{i_{\max}} [1 - k(i_{\max} - j) \Delta] f^{(2)}(t_j)}{\sum_{j=i+1}^{i_{\max}} [1 - k(i_{\max} - j) \Delta] f^{(2)}(t_j) + (i_{\max} - i) k \Delta \sum_{t_j \in [t_i+1, T-h]} f^{(2)}(t_j) \Delta},$$

где момент i_{\max} соответствует $\max f^{(2)}(t_i)$.

По достижении в момент $t_{i^{**}}$ статистикой π_{t_i} границы Γ_{t_i} повторный поиск прекращается и определяется момент появления сигнала. Для этого вычисляются значения апостериорных вероятностей

$$P \left\{ \theta \in [\hat{\theta} - h, \hat{\theta} | \eta_{t_{i^{**}}}^{t_{i^{**}}}] \right\} = \sum_{\theta_j \in [\hat{\theta} - h, \hat{\theta}_1]} f(\theta_j | \eta_{t_{i^{**}}}^{t_{i^{**}}}) \Delta$$

и принимается решение, что сигнал имел место на интервале $[t_i - h, t_i]$, если

$$P \left\{ \theta \in [t_i - h, t_i] | \eta_{t_{i^{**}}}^{t_{i^{**}}} \right\} = \max.$$

Правильным считается такое обнаружение, при котором начало действия сигнала было на интервале $[t_i - h, t_i]$.

Вычисления $f(\theta | \eta_{t_{i^{**}}}^{t_{i^{**}}})$ (предполагается, что $t_i \geq t_{i^{**}}$) могут быть получены с помощью (3.1).

Когда $t_{i^{**}} \in [0, h]$,

$$f(\theta | \eta_{t_{i^{**}}}^{t_{i^{**}}}) = \varphi_{\theta}^{t_{i^{**}}} A_{t_{i^{**}}}, \quad \theta \geq t_{i^{**}}.$$

Если $t_{i^{**}} \in [h, T-h]$,

$$f(\theta | \eta_{t_{i^{**}}}^{t_{i^{**}}}) = \begin{cases} \varphi_{\theta}^{\theta+h} A_{t_{i^{**}}}, & \theta \leq t_{i^{**}} - h; \\ \varphi_{\theta}^{t_{i^{**}}} A_{t_{i^{**}}}, & \theta > t_{i^{**}} - h; \end{cases}$$

где

$$A_{t_{i^{**}}} = (1 - \pi_{t_{i^{**}}}) f^{(2)}(\theta) \left(\sum_{t_j \in [t_{i^{**}}+1, T-h]} f^{(2)}(t_j) \Delta \right)^{-1}.$$

При $t_{i^{**}} = T-h$

$$f(\theta | \eta_{t_{i^{**}}}^{t_{i^{**}}}) = \begin{cases} \varphi_{\theta}^{\theta+h} A_{T-h}, & \theta \leq T-2h; \\ \varphi_{\theta}^{T-h} A_{T-h}, & \theta > T-2h; \end{cases}$$

где

$$A_{T-h} = \left(\sum_{t_j \in [t_{i^{**}}+1, T-h]} \varphi_{t_j}^{t_j+h} f^{(2)}(t_j) \Delta \right)^{-1}.$$

На рис. 17 представлены $f(\theta | \eta_{t_{i^{**}}}^{t_{i^{**}}})$, $P \left\{ \theta \in [\hat{\theta} - h, \hat{\theta}] | \eta_{t_{i^{**}}}^{t_{i^{**}}} \right\}$, π_{t_i} и Γ_{t_i} . В результате статистического эксперимента было установлено, что характеристики обнаружения имеют значения: вероятность ложной тревоги

$P_{л.т} = 0,159$; вероятность правильного определения момента появления сигнала $P_{пр.опр} = 0,672$; время, затрачиваемое на первичный поиск, $T_{ср}^{(1)} = 7,20$ с, на повторный поиск — $T_{ср}^{(2)} = 2,25$ с.

Итак, повторный поиск приводит к дальнейшему увеличению вероятности правильного определения момента появления сигнала: своевременное обнаружение было возможно с вероятностью $P_{св.обн} = 0,465$ при затрате времени на наблюдение $T_{ср}^{(0)} = 6,86$ с, первичный поиск позволил получить $P_{пр.опр} = 0,575$ ($k = 0,1$) при $T_{ср}^{(1)} = 7,20$ с, повторный поиск увеличил $P_{пр.опр}$ до $0,672$ при $T_{ср} = 9,45$ с.

Возрастание вероятности обнаружения сигнала произошло за счет увеличения времени наблюдения. Но это увеличение времени является достаточно экономным, во всяком случае настолько, насколько это возможно в условиях линейной функции выигрыша.

Проведенное моделирование позволило проиллюстрировать зависимость вероятности обнаружения сигнала от продолжительности времени, затрачиваемого на наблюдение: чем больше допустимое запаздывание в принятии решения о поступлении сигнала, тем с большей вероятностью может быть обнаружен сигнал. В пределе, т. е. в случае, когда наблюдение ведется до конца временного интервала, на котором появляется сигнал, вероятность правильного определения момента поступления сигнала будет достигать наибольшего значения. В этом случае процедура обнаружения превращается в процедуру оценивания.

Допустимость того или иного запаздывания в обнаружении сигнала и связанный с этим выбор того или иного алгоритма процедуры обнаружения зависит от задач, стоящих перед системой обнаружения.

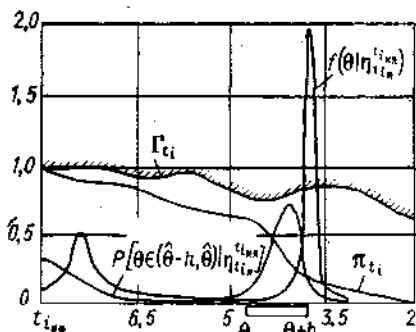


Рис. 17. Статистика и апостериорное распределение моментов появления сигнала при повторном поиске.

ОТНОШЕНИЕ ПРАВДОПОДОБИЯ
В СЛУЧАЕ ДВУХ НАБЛЮДАЕМЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Продолжим рассмотрение примеров на составление выражений для отношения правдоподобия. Отличительной особенностью рассматриваемых примеров будет наличие нескольких (в частности, двух) наблюдаемых воздействий. На практике такая ситуация возникает при использовании антенных решеток, состоящих из большого числа приемных элементов. Это многомерный случай со своими особенностями в вычислении φ_0 .

Рассмотрим сначала примеры на составление выражений для отношения правдоподобия, когда имеются два сдвинутых во времени наблюдаемых воздействия.

Пример 1. Одномерная задержка и низкочастотный сигнал. В этом случае процесс $\theta_t^{(2)}$ с

$$d\theta_t^{(2)} = -\frac{1}{h} \theta_t^{(2)} dt + \frac{1}{h} \theta_t dt$$

запаздывает на h относительно процесса θ_t с

$$d\theta_t = -a\theta_t dt + a\sqrt{C_1} dw_t^{(s)},$$

а наблюдаются процессы $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ с

$$d\eta_1(t) = \theta_t dt + dw_1^{(n)}(t);$$

$$d\eta_2(t) = \theta_t^{(2)} dt + dw_2^{(n)}(t).$$

Иначе говоря, имеют место двумерный процесс $\tilde{\theta}_t = \begin{bmatrix} \theta_t \\ \theta_t^{(2)} \end{bmatrix}$ и двумерный наблюдаемый процесс $\tilde{\eta}_t = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix}$, представляемые дифференциалами

$$d \begin{bmatrix} \theta_t \\ \theta_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ \theta_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} a\sqrt{C_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} dw_t^{(s)};$$

$$d \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ \theta_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dw_1^{(n)}(t) \\ dw_2^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

Уравнения Калмана-Бьюси принимают вид

$$dm_{\theta}(t|h) = -am_{\theta}(t) + \gamma_{11}(t|h)[d\eta_1(t) - m_{\theta}(t|h)dt] + \\ + \gamma_{12}(t|h)[d\eta_2(t) - m^{(2)}(t|h)dt];$$

$$dm^{(2)}(t|h) = \frac{1}{h}[m_{\theta}(t|h) - m^{(2)}(t|h)]dt + \gamma_{12}(t|h)[d\eta_1(t) - m_{\theta}(t|h)dt] + \\ + \gamma_{22}(t|h)[d\eta_2(t) - m^{(2)}(t|h)dt]$$

и

$$\dot{\gamma}_{11}(t|h) = -2a\gamma_{11}(t|h) - \gamma_{11}^2(t|h) - \gamma_{12}^2(t|h) + a^2C_1;$$

$$\dot{\gamma}_{12}(t|h) = -a\gamma_{12}(t|h) + \frac{1}{h}[\gamma_{11}(t|h) - \gamma_{12}(t|h)] - \gamma_{11}(t|h)\gamma_{12}(t|h) - \gamma_{22}(t|h)\gamma_{22}(t|h);$$

$$\dot{\gamma}_{22}(t|h) = \frac{2}{h}[\gamma_{12}(t|h) - \gamma_{22}(t|h)] - \gamma_{12}^2(t|h) - \gamma_{22}^2(t|h).$$

Отношение правдоподобия определится выражением

$$\varphi_0^t = \exp \left[\int_0^t m_{\theta}(s|h)d\eta_1(s) + \int_0^t m^{(2)}(s|h)d\eta_2(s) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^t [m_{\theta}(s|h) + m^{(2)}(s|h)]^2 ds \right].$$

Пример 2. Одномерная задержка и высокочастотный сигнал. В этом случае процесс $\theta_t^{(2)}$ с

$$d\theta_t^{(2)} = -\frac{1}{h}\theta_t^{(2)}dt + \frac{1}{h}\theta_t dt$$

запаздывает на h относительно процесса θ_t с

$$d\theta_t = v_t^{(1)}dt; \\ dv_t^{(1)} = -(b_1v_t^{(1)} + b_0\theta_t)dt + b_1\sqrt{(b_0 - b_1^2/4)C_1}dw_t^{(s)},$$

а наблюдаются процессы $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ с

$$d\eta_1(t) = \theta_t dt + dw_1^{(n)}(t); \\ d\eta_2(t) = \theta_t^{(2)} dt + dw_2^{(n)}(t).$$

Иначе говоря, имеет место трехмерный процесс $\tilde{\theta}_t = \begin{bmatrix} \theta_t \\ v_t^{(1)} \\ \theta_t^{(2)} \end{bmatrix}$ и двумерный наблюдае-

мый процесс $\tilde{\eta}_t = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix}$, представляемые дифференциалами

$$d \begin{bmatrix} \theta_f \\ v_f^{(1)} \\ \theta_f^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b_0 & -b_1 & 0 \\ \frac{1}{h} & 0 & -\frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_f \\ v_f^{(1)} \\ \theta_f^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 \sqrt{(b_0 - b_1^2/4)C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dw_f^{(s)} ;$$

$$d \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_f \\ v_f^{(1)} \\ \theta_f^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dw_1^{(n)}(t) \\ dw_2^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

Уравнения Калмана-Бьюси принимают вид

$$dm_\theta(t|h) = m^{(1)}(t|h) dt + \gamma_{11}(t|h)[d\eta_1(t) - m_\theta(t|h) dt] + \\ + \gamma_{12}(t|h)[d\eta_2(t) - m^{(2)}(t|h) dt] ;$$

$$dm^{(1)}(t|h) = [b_1 m^{(1)}(t|h) - b_0 m_\theta(t|h)] dt + \gamma_{12}(t|h)[d\eta_1(t) - m_\theta(t|h) dt] + \\ + \gamma_{22}(t|h)[d\eta_2(t) - m^{(2)}(t|h) dt] ;$$

$$dm^{(2)}(t|h) = \frac{1}{h} [m_\theta(t|h) - m^{(2)}(t|h)] dt + \gamma_{13}(t|h)[d\eta_1(t) - m_\theta(t|h) dt] + \\ + \gamma_{33}(t|h)[d\eta_2(t) - m^{(2)}(t|h) dt]$$

и

$$\dot{\gamma}_{11}(t|h) = 2\gamma_{12}(t|h) - \gamma_{11}^2(t|h) - \gamma_{13}^2(t|h) ;$$

$$\dot{\gamma}_{12}(t|h) = -b_0 \gamma_{11}(t|h) - b_1 \gamma_{12}(t|h) + \gamma_{22}(t|h) - \gamma_{11}(t|h) \gamma_{12}(t|h) - \\ - \gamma_{13}(t|h) \gamma_{23}(t|h) ;$$

$$\dot{\gamma}_{13}(t|h) = \frac{1}{h} [\gamma_{11}(t|h) - \gamma_{13}(t|h)] + \gamma_{23}(t|h) - \gamma_{11}(t|h) \gamma_{13}(t|h) - \\ - \gamma_{13}(t|h) \gamma_{33}(t|h) ;$$

$$\dot{\gamma}_{22}(t|h) = -2[b_0 \gamma_{12}(t|h) + b_1 \gamma_{22}(t|h)] - \gamma_{12}^2(t|h) - \gamma_{23}^2(t|h) + \\ + b_1^2(b_0 - b_1^2/4) C_1 ;$$

$$\dot{\gamma}_{23}(t|h) = \frac{1}{h} \gamma_{12}(t|h) - b_0 \gamma_{13}(t|h) - \left(\frac{1}{h} + b_1 \right) \gamma_{23}(t|h) - \gamma_{12}(t|h) \gamma_{13}(t|h) - \\ - \gamma_{23}(t|h) \gamma_{33}(t|h) ;$$

$$\dot{\gamma}_{33}(t|h) = \frac{2}{h} [\gamma_{13}(t|h) - \gamma_{33}(t|h)] - \gamma_{13}^2(t|h) + \gamma_{33}^2(t|h) .$$

Выражение для отношения правдоподобия будет совпадать с соответствующим выражением из примера 1.

Пример 3. Двумерная задержка и низкочастотный сигнал. В этом случае процесс $\theta_t^{(2)}$ с

$$\theta_t^{(2)} = \theta_t - \frac{12}{h} v_t^{(1)};$$

$$dv_t^{(0)} = v_t^{(1)} dt;$$

$$dv_t^{(1)} = - \left(\frac{6}{h} v_t^{(1)} + \frac{12}{h^2} v_t^{(0)} \right) dt + \theta_t dt$$

запаздывает на h относительно процесса θ_t с

$$d\theta_t = -a\theta_t dt + a\sqrt{C_1} dw_t^{(s)},$$

а наблюдаются процессы $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ с

$$d\eta_1(t) = \theta_t dt + dw_1^{(n)}(t);$$

$$d\eta_2(t) = \theta_t^{(2)} dt + dw_2^{(n)}(t).$$

Имеет место трехмерный процесс $\tilde{\theta}_t = \begin{bmatrix} \theta_t \\ v_t^{(0)} \\ v_t^{(1)} \end{bmatrix}$ и двумерный наблюдаемый процесс

$\tilde{\eta}_t = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix}$, представляемые дифференциалами

$$d \begin{bmatrix} \theta_t \\ v_t^{(0)} \\ v_t^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{12}{h^2} & -\frac{6}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ v_t^{(0)} \\ v_t^{(1)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} a\sqrt{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dw_t^{(s)},$$

$$d \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{12}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ v_t^{(0)} \\ v_t^{(1)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dw_1^{(n)}(t) \\ dw_2^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

Уравнения Калмана-Бьюси принимают вид

$$dm_\theta(t|h) = -am_\theta(t|h)dt + \gamma_{11}(t|h)[d\eta_1(t) - m_\theta(t|h)dt] + \\ + \left[\gamma_{11}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{13}(t|h) \right] \left[d\eta_2(t) - m_\theta(t|h)dt + \frac{12}{h} m^{(1)}(t|h)dt \right];$$

$$dm^{(0)}(t|h) = m^{(1)}(t|h)dt + \gamma_{12}(t|h)[d\eta_1(t) - m_\theta(t|h)dt] + \\ + \left[\gamma_{12}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{23}(t|h) \right] \left[d\eta_2(t) - m_\theta(t|h)dt + \frac{12}{h} m^{(1)}(t|h)dt \right];$$

$$dm^{(1)}(t|h) = m_{\theta}(t|h)dt - \left[\frac{6}{h} m^{(1)}(t|h) + \frac{12}{h} m^{(0)}(t|h) \right] dt + \\ + \gamma_{13}(t|h)[d\eta_1(t) - m_{\theta}(t|h)dt] + \\ + \left[\gamma_{13}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{23}(t|h) \right] [d\eta_2(t) - m_{\theta}(t|h)dt + \frac{12}{h} m^{(1)}(t|h)dt]$$

и

$$\dot{\gamma}_{11}(t|h) = -2a\gamma_{11}(t|h) - \gamma_{11}^2(t|h) - \left[\gamma_{11}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{13}(t|h) \right]^2 + a^2 C_1;$$

$$\dot{\gamma}_{12}(t|h) = -a\gamma_{12}(t|h) + \gamma_{13}(t|h) - \gamma_{11}(t|h)\gamma_{12}(t|h) -$$

$$- \left[\gamma_{11}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{13}(t|h) \right] \left[\gamma_{12}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{23}(t|h) \right];$$

$$\dot{\gamma}_{13}(t|h) = \gamma_{11}(t|h) - \frac{12}{h^2} \gamma_{12}(t|h) - \left(a + \frac{6}{h} \right) \gamma_{13}(t|h) - \gamma_{11}(t|h)\gamma_{13}(t|h) -$$

$$- \left[\gamma_{11}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{13}(t|h) \right] \left[\gamma_{13}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{33}(t|h) \right];$$

$$\dot{\gamma}_{22}(t|h) = 2\gamma_{23}(t|h) - \gamma_{12}^2(t|h) - \left[\gamma_{12}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{23}(t|h) \right]^2;$$

$$\dot{\gamma}_{23}(t|h) = \gamma_{12}(t|h) - \frac{12}{h^2} \gamma_{22}(t|h) - \frac{6}{h} \gamma_{23}(t|h) + \gamma_{33}(t|h) - \gamma_{12}(t|h)\gamma_{13}(t|h) -$$

$$- \left[\gamma_{12}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{23}(t|h) \right] \left[\gamma_{13}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{33}(t|h) \right];$$

$$\dot{\gamma}_{33}(t|h) = 2 \left[\gamma_{13}(t|h) - \frac{12}{h^2} \gamma_{23}(t|h) - \frac{6}{h} \gamma_{33}(t|h) \right] -$$

$$- \gamma_{13}^2(t|h) - \left[\gamma_{13}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{33}(t|h) \right]^2.$$

Отношение правдоподобия определится выражением

$$\varphi_0^x = \exp \left[\int_0^t m_s d\eta_1(s) + \int_0^t \left(m_s - \frac{12}{h} m_s^{(1)} \right) d\eta_2(s) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^t \left[m_s^2 + \left(m_s - \frac{12}{h} m_s^{(1)} \right)^2 \right] ds \right].$$

Пример 4. Двумерная задержка и высокочастотный сигнал. В этом случае процесс $\theta_t^{(2)}$ с

$$\theta_t^{(2)} = \theta_t - \frac{12}{h} v_t^{(1)};$$

$$dv_t^{(0)} = v_t^{(1)} dt;$$

$$dv_t^{(1)} = -\left(\frac{6}{h} v_t^{(1)} + \frac{12}{h^2} v_t^{(0)}\right) dt + \theta_t dt$$

запаздывает на h относительно процесса θ_t с

$$d\theta_t = v_t dt;$$

$$dv_t = -(b_1 v_t + b_0 \theta_t) dt + b_1 \sqrt{(b_0 - b_1^2/4) C_1} dw_t^{(s)},$$

а наблюдаются процессы $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ с

$$d\eta_1(t) = \theta_t dt + dw_1^{(n)}(t);$$

$$d\eta_2(t) = \theta_t^{(2)} dt + dw_2^{(n)}(t).$$

Имеет место четырехмерный процесс $\theta_t = \begin{bmatrix} \theta_t \\ v_t \\ v_t^{(0)} \\ v_t^{(1)} \end{bmatrix}$ и двумерный наблюдаемый про-

цесс $\tilde{\eta}_t = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix}$, представляемые дифференциалами

$$d \begin{bmatrix} \theta_t \\ v_t \\ v_t^{(0)} \\ v_t^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b_0 & -b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{12}{h^2} & -\frac{6}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ v_t \\ v_t^{(0)} \\ v_t^{(1)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 \sqrt{(b_0 - b_1^2/4) C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dw_t^{(s)};$$

$$d \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{12}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_t \\ v_t \\ v_t^{(0)} \\ v_t^{(1)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dw_1^{(n)}(t) \\ dw_2^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

Уравнения Калмана-Бьюси примут вид

$$\begin{aligned}
 dm_{\theta}(t|h) &= m(t|h)dt + \gamma_{11}(t|h)[d\eta_1(t) - m_{\theta}(t|h)dt] + \\
 &+ \left[\gamma_{11}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{14}(t|h) \right] \left[d\eta_2(t) - m_{\theta}(t|h)dt + \frac{12}{h} m^{(1)}(t|h)dt \right]; \\
 dm(t|h) &= -[b_1 m(t|h) + b_0 m_{\theta}(t|h)]dt + \gamma_{12}(t|h)[d\eta_1(t) - m_{\theta}(t|h)dt] + \\
 &+ \left[\gamma_{12}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{24}(t|h) \right] \left[d\eta_2(t) - m_{\theta}(t|h)dt + \frac{12}{h} m^{(1)}(t|h)dt \right]; \\
 dm^{(0)}(t|h) &= m^{(1)}(t|h)dt + \gamma_{13}(t|h)[d\eta_1(t) - m_{\theta}(t|h)dt] + \\
 &+ \left[\gamma_{13}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{34}(t|h) \right] \left[d\eta_2(t) - m_{\theta}(t|h)dt + \frac{12}{h} m^{(1)}(t|h)dt \right]; \\
 dm^{(1)}(t|h) &= \left[m_{\theta}(t|h) - \frac{6}{h} m^{(1)}(t|h) - \frac{12}{h} m^{(0)}(t|h) \right] dt + \\
 &+ \gamma_{14}(t|h)[d\eta_1(t) - m_{\theta}(t|h)dt] + \\
 &+ \left[\gamma_{14}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{44}(t|h) \right] \left[d\eta_2(t) - m_{\theta}(t|h)dt + \frac{12}{h} m^{(1)}(t|h)dt \right] \\
 \dot{\gamma}_{11}(t|h) &= 2\gamma_{12}(t|h) - \gamma_{11}^2(t|h) - \left[\gamma_{11}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{14}(t|h) \right]^2; \\
 \dot{\gamma}_{12}(t|h) &= \gamma_{22}(t|h) - b_0 \gamma_{11}(t|h) - b_1 \gamma_{12}(t|h) - \gamma_{11}(t|h) \gamma_{12}(t|h) - \\
 &- \left[\gamma_{11}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{14}(t|h) \right] \left[\gamma_{12}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{24}(t|h) \right]; \\
 \dot{\gamma}_{13}(t|h) &= \gamma_{23}(t|h) + \gamma_{14}(t|h) - \gamma_{11}(t|h) \gamma_{13}(t|h) - \\
 &- \left[\gamma_{11}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{14}(t|h) \right] \left[\gamma_{13}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{34}(t|h) \right]; \\
 \dot{\gamma}_{14}(t|h) &= \gamma_{24}(t|h) + \gamma_{11}(t|h) - \frac{12}{h^2} \gamma_{13}(t|h) - \frac{6}{h} \gamma_{14}(t|h) - \gamma_{11}(t|h) \gamma_{14}(t|h) - \\
 &- \left[\gamma_{12}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{24}(t|h) \right] \left[\gamma_{14}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{44}(t|h) \right]; \\
 \dot{\gamma}_{22}(t|h) &= -2[b_0 \gamma_{12}(t|h) + b_1 \gamma_{22}(t|h)] - \gamma_{12}^2(t|h) - \\
 &- \left[\gamma_{12}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{24}(t|h) \right]^2 + b_1^2(b_0 - b_1^2/4) C_1; \\
 \dot{\gamma}_{23}(t|h) &= -[b_0 \gamma_{13}(t|h) + b_1 \gamma_{23}(t|h)] + \gamma_{24}(t|h) - \gamma_{12}(t|h) \gamma_{13}(t|h) - \\
 &- \left[\gamma_{12}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{24}(t|h) \right] \left[\gamma_{13}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{34}(t|h) \right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{23}(t|h) &= -[b_0 \gamma_{14}(t|h) + b_1 \gamma_{24}(t|h)] + \gamma_{12}(t|h) - \frac{12}{h^2} \gamma_{23}(t|h) - \\ &- \frac{6}{h} \gamma_{24}(t|h) - \gamma_{12}(t|h) \gamma_{14}(t|h) - \\ &- \left[\gamma_{12}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{24}(t|h) \right] \left[\gamma_{14}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{44}(t|h) \right]; \\ \dot{\gamma}_{33}(t|h) &= 2\gamma_{34}(t|h) - \gamma_{13}^2(t|h) - \left[\gamma_{13}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{34}(t|h) \right]^2; \\ \dot{\gamma}_{34}(t|h) &= \gamma_{44}(t|h) + \gamma_{13}(t|h) - \frac{12}{h^2} \gamma_{33}(t|h) - \\ &- \frac{6}{h} \gamma_{34}(t|h) - \gamma_{13}(t|h) \gamma_{14}(t|h) - \\ &- \left[\gamma_{13}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{34}(t|h) \right] \left[\gamma_{14}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{44}(t|h) \right]; \\ \dot{\gamma}_{44}(t|h) &= 2 \left[\gamma_{14}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{34}(t|h) - \frac{6}{h} \gamma_{44}(t|h) \right] - \\ &- \gamma_{14}^2(t|h) - \left[\gamma_{14}(t|h) - \frac{12}{h} \gamma_{44}(t|h) \right]^2. \end{aligned}$$

Выражение для отношения правдоподобия будет совпадать с соответствующим выражением из примера 3.

Для нахождения φ_0^f необходимо выполнять громоздкие вычисления. Увеличение числа приемников приводит к дальнейшему усложнению; возникает необходимость в имитации задержек со значениями $h, 2h, \dots, nh$ и связанное с этим увеличение числа уравнений фильтрации.

Возможен и частный случай, когда $h=0$. Такая ситуация возникает тогда, когда в качестве направления, с которого ожидается поступление сигнала (в случае антенной решетки), выбирается направление, перпендикулярное линии приемных элементов. Тогда, если на антенну воздействует плоская волна, волновой фронт которой параллелен линии элементов, на приемных элементах будут идентичные напряжения. Помехи при этом по-прежнему останутся независимыми.

Если направление, с которого поступает сигнал, не перпендикулярно линии элементов, то антенну можно повернуть к этому перпендикулярному направлению механически или ввести задержки непосредственно после каждого приемного элемента.

Вычисление φ_0^f может быть выполнено, как и раньше, введением многомерных процессов θ_t^f и $\tilde{\eta}_t^f$. Рассмотрим примеры.

- Пример 5. Низкочастотный сигнал, описываемый дифференциальным уравнением

$$d\theta_t^f = -a\theta_t^f dt + \alpha \sqrt{C_1} dw_t^{(s)}.$$

Дифференциалы входных воздействий имеют вид

$$d\eta_{1i}(t) = \theta_t^f dt + dw_{1i}^{(n)}(t);$$

$$d\eta_{2i}(t) = \theta_t^f dt + dw_{2i}^{(n)}(t),$$

или в векторной форме

$$d\tilde{\eta}_t = A\tilde{\delta}_t dt + Bd\tilde{w}_t,$$

где

$$\tilde{\eta}_t = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{w}_t = \begin{bmatrix} w_1^{(n)}(t) \\ \vdots \\ w_n^{(n)}(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Уравнение Калмана-Бьюси для m_t принимает вид

$$dm_t = -am_t dt + \gamma_t \left[\sum_{j=1}^n d\eta_j(t) - nm_t dt \right], \quad (1.1)$$

где γ_t находится из уравнения

$$\dot{\gamma}_t = -2a\gamma_t - n\gamma_t^2 + a^2 C_1. \quad (1.2)$$

Выражение для φ_0^t будет иметь вид

$$\varphi_0^t = \exp \left[\int_0^t m_s \sum_{j=1}^n d\eta_j(s) - \frac{n}{2} \int_0^t m_s^2 ds \right].$$

Полученный результат показывает, что можно не вводить многомерных процессов δ_t и $\tilde{\eta}_t$, а оперировать с суммарным входным воздействием, получаемым в результате когерентного сложения процессов, описывающих сигнал, и энергетического сложения процессов, описывающих помеху.

Дифференциал такого суммарного воздействия может быть представлен в виде

$$d\eta_t = \begin{cases} \sum_{j=1}^n dw_j^{(n)}(t), & \text{одна помеха;} \\ \sum_{j=1}^n dw_j(t) + n\delta_t dt, & \text{помеха и сигнал,} \end{cases}$$

где n — число приемных элементов.

При таком подходе уравнения фильтрации (1.1) и (1.2) могут быть получены непосредственно из гл. 3 простым изменением соотношений между сигналом и помехой. С учетом сказанного сразу приведем результаты для следующих двух примеров.

Пример 6. Низкочастотный сигнал, описываемый уравнениями

$$d\theta_t = v_t^{(1)} dt; \quad (1.3)$$

$$dv_t^{(1)} = -(b_1 v_t^{(1)} + b_0 \theta) dt + b_0 \sqrt{C_1} dw_t^{(s)} \quad (1.4)$$

при $b_0 - b^2/4 < 0$.

Дифференциалы входных воздействий имеют вид

$$d\eta_i(t) = \theta_i dt + dw_i^{(n)}(t);$$

$$d\eta_n(t) = \theta_n dt + dw_n^{(n)}(t).$$

Уравнения Калмана-Бьюси для m_t и $m_t^{(1)}$ имеют вид

$$dm_\theta(t) = m_t^{(1)} dt + \gamma_{11}(t) \left\{ \sum_{j=1}^n d\eta_j(t) - nm_\theta(t) dt \right\};$$

$$dm_t^{(1)} = -[b_1 m_t^{(1)} + b_0 m_\theta(t)] dt + \gamma_{12}(t) \left\{ \sum_{j=1}^n d\eta_j(t) - nm_\theta(t) dt \right\},$$

где $\gamma_{11}(t)$ и $\gamma_{12}(t)$ находятся из системы уравнений

$$\dot{\gamma}_{11}(t) = 2\gamma_{12}(t) - n\gamma_{11}^2(t);$$

$$\dot{\gamma}_{12}(t) = \gamma_{22}(t) - b_0 \gamma_{11}(t) - b_1 \gamma_{12}(t) - n\gamma_{11}(t)\gamma_{12}(t);$$

$$\dot{\gamma}_{22}(t) = -2[b_0 \gamma_{12}(t) + b_1 \gamma_{22}(t)] - n\gamma_{12}^2(t) + b_0^2 C_1.$$

Вид выражения для φ_0^f совпадает с соответствующим выражением из примера 5.

Пример 7. Высокочастотный узкополосный сигнал, описываемый уравнениями (1.3) и (1.4) при $b_0 - b_1^2/4 > 0$.

Дифференциалы входных воздействий имеют тот же вид, что и в примере 6.

Уравнения Калмана-Бьюси совпадают с уравнениями из примера 6, за исключением уравнения для $\dot{\gamma}_{22}(t)$, которое принимает вид

$$\dot{\gamma}_{22}(t) = -2[b_0 \gamma_{12}(t) + b_1 \gamma_{22}(t)] - n\gamma_{12}^2(t) + b_1^2(b_0 - b_1^2/4)C_1.$$

Выражение для φ_0^f совпадает с соответствующим выражением из примера 5.

Как видно из приведенных примеров, предположение о том, что в качестве направления, с которого ожидается поступление сигнала, выбирается направление, перпендикулярное линии приемных элементов ($h=0$), существенно упрощает вычисление φ_0^f . В этом случае возрастание числа приемных элементов (входных воздействий) не приводит к росту числа уравнений фильтрации.

УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ И УРАВНЕНИЯ СТАТИСТИК
ДЛЯ СЛУЧАЯ ТЕЛЕГРАФНОГО СИГНАЛА

Предположим, что в качестве сигнала выступает однородный марковский процесс с двумя состояниями 0 и 1 и с вероятностями переходов

$$P_{00} = 1 - \lambda \Delta + o(\Delta);$$

$$P_{01} = \lambda \Delta + o(\Delta);$$

$$P_{10} = \delta \Delta + o(\Delta);$$

$$P_{11} = 1 - \delta \Delta + o(\Delta).$$

Такой процесс называется *телеграфным сигналом*. Составление уравнения для m_t может быть выполнено, если воспользоваться полученным в работе [25] уравнением для апостериорной вероятности $\pi_t = P(\theta_t = r / \eta_0^t)$:

$$d\pi_t = \left[(1 - \pi_t) \left(\lambda - \frac{1}{C_2} r^2 \pi_t^2 \right) - \delta \pi_t \right] dt + \frac{1}{C_2} r \pi_t (1 - \pi_t) d\eta_t.$$

Действительно, поскольку $m_t = M(\theta_t / \eta_0^t) = r \pi_t$, то по формуле замены переменных (формулы Ито), приведенной в работе [6], имеем

$$dm_t = \left[(1 - \pi_t) \left(\lambda - \frac{1}{C_2} r^2 \pi_t^2 \right) - \delta \pi_t \right] r dt + \frac{1}{C_2} r^2 \pi_t (1 - \pi_t) d\eta_t$$

или

$$dm_t = \left[(r - m_t) \left(\lambda - \frac{1}{C_2} m_t^2 \right) - \delta m_t \right] dt + \frac{1}{C_2} m_t (r - m_t) d\eta_t.$$

Как видим, уравнение для m_t оказалось нелинейным, в отличие от случая, когда сигнал был гауссовским.

Решение этого уравнения может быть выполнено как методом Пикара (первая и вторая итерации), так и приведенным его к симметризованному виду и последующим решением методом Рунге—Кутты. В последнем случае симметризованное уравнение для m_t , согласно соотношению Р. Л. Стратоновича [20]

$$\int_0^t \Phi(m_s) d\eta_s = \int_0^t \Phi(m_s) \hat{d}\eta_s - \frac{1}{2} \int_0^t \Phi(m_s) \Phi'(m_s) ds,$$

может быть представлено в виде

$$dm_t = \left[(r - m_t) \left(\lambda - \frac{1}{C_2} m_t^2 \right) - \delta m_t - \frac{1}{2C_2} m_t^2 (r - m_t) (r - 2m_t) \right] dt + \frac{1}{C_2} m_t (r - m_t) \hat{d}\eta_t.$$

Симметризация уравнения для β_t может быть выполнена в полной аналогии с симметризацией уравнения в случае, когда сигнал идентифицирован с гауссовско-марковским процессом (см. § 5.1). В рассматриваемом случае

$$\int_0^t m_s \beta_s d\eta_s = \int_0^t m_s \beta_s \hat{d}\eta_s - \frac{r}{2} \int_0^t m_s \beta_s \hat{d}s$$

и поэтому симметризованное уравнение для β_t принимает вид

$$d\beta_t = \begin{cases} \left[f(t) - \frac{1}{2C_2} r m_t \beta_t \right] dt + \frac{1}{C_2} m_t \beta_t \hat{d}\eta_t, & t < h; \\ \left[f(t) - f(t-h) \varphi_{t-h}^t - \frac{1}{2C_2} r m_t \beta_t \right] dt + \frac{1}{C_2} m_t \beta_t \hat{d}\eta_t, & t \geq h. \end{cases}$$

Входящее в уравнение для α_t и β_t отношение правдоподобия φ_{t-h}^t должно вычисляться с учетом того, что

$$\int_{t-h}^t m_s d\eta_s = \int_{t-h}^t m_s \hat{d}\eta_s - \frac{1}{2} \int_{t-h}^t m_s (r - m_s) ds,$$

т. е. в виде

$$\varphi_{t-h}^t = \exp \left[\frac{1}{C_2} \int_{t-h}^t m_s \hat{d}\eta_s - \frac{1}{2C_2} r \int_{t-h}^t m_s ds \right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакут П. А., Жулина Ю. В., Иванчук Н. А. Обнаружение движущихся объектов. М., Советское радио, 1980.
2. Блекуэлл Д., Гиршик М. А. Теория игр и статистических решений. Пер. с англ. М., Иностранная литература, 1958.
3. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Изд. 2-е. М., Наука, 1973.
4. Вальд А. Последовательный анализ. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1960.
5. Вальд А. Статистические решающие функции. Пер. с англ. — В сб.: Позиционные игры. М., Наука, 1967.
6. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, Наукова думка, 1968.
7. Дашевский М. Л., Липцер Р. Ш. Моделирование стохастических дифференциальных уравнений, связанных с задачей о разладке, на аналоговой машине. — Автоматика и телемеханика, 1966, т. XXVII, № 4, с. 142–150.
8. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. М., Наука, 1967.
9. Евтютов А. П., Митько В. Б. Примеры инженерных расчетов в гидроакустике. Л., Судостроение, 1981.
10. Ито К. О стохастических дифференциальных уравнениях. Пер. с англ. — В сб.: Математика, 1957, т. I, № 1, с. 78–116.
11. Матвиенко В. Н., Тарасюк Ю. Ф. Дальность действия гидроакустических средств. Л., Судостроение, 1976.
12. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов. — Тр. Математического института им. В. А. Стеклова, 1968, т. CIV, с. 135–180.
13. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М., Наука, 1974.
14. Ольшевский В. В. Статистические методы в гидролокации. Л., Судостроение, 1973.
15. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применение, 1956, т. 1, 2, с. 177–238.
16. Разевиг В. Д. Цифровое моделирование многомерных динамических систем при случайных воздействиях. — Автоматика и телемеханика, 1980, № 4.
17. Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И. Теория оптимальных правил остановки. М., Наука, 1975.
18. Сосудин Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М., Советское радио, 1978.
19. Сташкевич А. П. Акустика моря. Л., Судостроение, 1966.
20. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М., Изд-во МГУ, 1966.
21. Теория обнаружения сигналов. Под ред. П. А. Бакута. М., Радио и связь, 1984.
22. Ширяев А. Н. Обнаружение спонтанно возникающих эффектов. — ДАН СССР, 1961, т. 138, № 4, с. 794–801.
23. Ширяев А. Н. О марковских достаточных статистиках в неаддитивных байесовских задачах последовательного анализа. — Теория вероятностей и ее применение, 1964, т. IX, № 4, с. 670–686.

24. Ширяев А. Н. Последовательный анализ и управляемые случайные процессы (дискретное время). — Кибернетика, 1965, № 3, с. 1–24.
25. Ширяев А. Н. Некоторые новые результаты в теории управляемых случайных процессов. — Trans. Fourth, Prague Conference on Inform. Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Prague, 1967, с. 131–203.
26. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. Изд. 2-е, М., Наука, 1976.
27. Урик Р. Д. Основы гидроакустики. Пер. с англ. Л., Судостроение, 1978.
28. Amster S. J. A modified Bayes stopping rule, Ann. Math. Statist., 1963, vol. 34, 4, p. 1404–1413.
29. Arrow K. J., Blackwell D., Girchick M. D. Bayes and minimax solutions of sequential decision problem. Econometrica, 1949, vol. 17, p. 213–214.
30. Kalman R. E., Bucy R. S. New results in linear filtering and prediction theory. Trans. ASME, Ser. D., J. Basic. Eng., December 1961, vol. 83, p. 95–107.
31. Wald A., Wolfowitz J. Optimum character of the sequential probability ratio test. Ann Math. Statist., 1948, vol. 19, N3, p. 326–339.
32. Wald A., Wolfowitz J. Bayes solutions of sequential decision problems. Ann. Math. Statist., 1950, vol. 21, N1, p. 82–99.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	6
Глава 1. Последовательный характер обнаружения, дифференциальное представление сигнала и помех	11
1.1. Особенности последовательного обнаружения сигналов	11
1.2. Математическая модель наблюдаемых воздействий	17
1.3. Дифференциалы наблюдаемых воздействий	21
Глава 2. Обнаружение сигнала (дискретное время)	23
2.1. Правило принятия решения о появлении сигнала	23
2.1.1. Обнаружение, допускающее малые запаздывания	29
2.1.2. Обнаружение, допускающее большие запаздывания	30
2.2. Рекуррентные соотношения для статистик	35
2.3. Эффективность процедур обнаружения сигнала	39
2.3.1. Обнаружение, допускающее малые запаздывания	40
2.3.2. Обнаружение, допускающее большие запаздывания	44
Глава 3. Обнаружение сигнала (непрерывное время)	48
3.1. Правило принятия решения о появлении сигнала постоянной продолжительности ($h = \text{const}$)	48
3.1.1. Обнаружение, допускающее малые запаздывания	51
3.1.2. Обнаружение, допускающее большие запаздывания	53
3.2. Правило принятия решения о появлении сигнала случайной продолжительности ($h = \text{var}$)	56
Глава 4. Стохастические дифференциальные уравнения статистик	60
4.1. Отношение правдоподобия	60
4.2. Уравнения статистик в случае сигнала постоянной продолжительности	72
4.3. Уравнения статистик в случае сигнала случайной продолжительности	80
Глава 5. Эффективность процедур обнаружения сигналов	88
5.1. Решение уравнений	88
5.2. Моделирование процесса обнаружения сигнала	99
5.2.1. Обнаружение, допускающее малые запаздывания	103
5.2.2. Обнаружение, допускающее большие запаздывания	110
Приложение I. Отношение правдоподобия в случае двух наблюдаемых воздействий	116
Приложение II. Уравнения фильтрации и уравнения статистик для случая телеграфного сигнала	126
Список литературы	128

Библиотека инженера-гидроакустика

Алексей Константинович Розов

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

Заведующий редакцией А. Д. Старков. Редактор А. И. Голикова.
Художественный редактор О. П. Андреев. Технический редактор
Г. Г. Федорова. Корректор В. В. Румянцев.

ИБ № 1240

Подписано в печать 04.12.86. М-35581. Формат 60x90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,25.
Усл. кр.-отг. 8,5. Уч. изд. л. 7,6. Изд. 4101-85. Тираж 2160 экз.
Цена 40 к. Зак. 812.

Набрано в издательстве „Судоостроение” на наборно-программи-
рующих автоматах операторами И. В. Дроздовой, В. В. Ми-
хайловой и Ю. Л. Подольным.

Издательство „Судоостроение”, 191065, Ленинград, ул.
Гоголя, 4.

Тульская полиграфия Союзполиграфпрома при Государствен-
ном Комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книж-
ной торговли, г. Тула, пр. Ленина, 109.

В 1987 г. издательство „Судостроение” в серии „Библиотека инженера-гидроакустика” выпускает книги

ГОЛУБКОВ А. Г. Специализированные гидроакустические системы. 10 л. 55 к.

Рассмотрены особенности проектирования специализированных гидроакустических систем. Изложены вопросы реализации предельно достижимых параметров специализированных ГАС. Описаны методы и процессы излучения, приема и обработки гидроакустических сигналов, позволяющие повысить технические характеристики ГАС и получить информацию о подводных объектах, необходимую для решения актуальных задач освоения Мирового океана.

Для специалистов, занимающихся вопросами гидроакустики, геофизики, подводной геологии и рыбного промысла.

ОРЛОВ В. В., ШАБРОВ А. А. Гидроакустическая аппаратура рыбопромыслового флота. 18 л. 1 р. 20 к.

Изложены расчеты основных гидроакустических характеристик рыбопоисковой аппаратуры. Описаны принципы построения гидроакустических станций. Даны инженерные расчеты тактико-технических эксплуатационных и экономических характеристик проектируемых станций.

Для специалистов, занимающихся проектированием, созданием и эксплуатацией гидроакустических станций рыбопромыслового флота.

В прикладной гидроакустике часто возникает необходимость, в которой важно, чтобы за время плавного сигнала длительности T наступило резкое, в три десятилетия сигнала его обнаружение производится с вероятностью P и минимальным обнаружением. Выполнение этих требований обычно достигается в результате параметрической оптимизации систем. Для обнаружения пространственно слабых сигналов в том случае для увеличения дальности действия тропы обнаружения лучшим результатом может быть оптимизация самой структуры или алгоритма обнаружения системы обнаружения. Рассмотрены эти задачи в последующих разделах книги.